CHAPITRE I

Fonction d'une seule variable réelle

CHAPITRE II

Fonction de plusieurs variables réelles

CHAPITRE III

Champs scalaire et vectoriel - Opérateurs différentiels

CHAPITRE IV

Courbes paramétriques dans le plan et dans l'espace

Bibliographie

CHAPITRE I

Fonction d'une seule variable réelle

I.1 Définitions

Les fonctions dont il sera question dans ce chapitre sont des applications d'une partie de l'ensemble des réels, à valeurs dans l'ensemble des réels.

Définition 1.1 Domaine. Si f est une fonction on appelle *domaine de définition* l'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ existe.

Ainsi

- si $f(x) = \ln\{1/[(x-1)(x-3)]\}$, alors $D_f =]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$ c'est en effet l'ensemble où le dénominateur est positif et non nul.

- si par contre $g(x) = -\ln(x-1) - \ln(x-3)$, alors cette fois chacun des deux termes, pour être calculé doit être le logarithme d'un nombre obligatoirement positif, dans ce cas $D_g =]3;+\infty[$.

Définition 1.2 Image. On appelle *image* l'ensemble de toutes les valeurs possibles de $f(x)$.

Ainsi pour

$f_1(x) = \sqrt{|x|}$, $D_{f_1} =]-\infty;+\infty[$ et $I_{f_1} = [0;+\infty[$.

$f_2(x) = \sqrt{x}$, $D_{f_2} = [0;+\infty[$ et $I_{f_2} = [0;+\infty[$.

Définition 1.3 Injective. Soit l'application f de E dans F, on dit que f est *injective* si deux éléments distincts ont des images distinctes, en d'autres termes : $\forall x_1 \in E, \forall x_2 \in E, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Définition 1.4 Surjective. Soit l'application f de E dans F, on dit que f est *surjective* si tout élément de F admet au moins un antécédent, en d'autres termes : $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.

Définition 1.5 Bijective. Soit l'application f de E dans F, f est *bijective* si elle est injective et surjective. Tout élément de F admet alors un antécédent et un seul dans E.

Définition 1.6 Fonction réciproque. Si f est une bijection de E dans F, alors pour tout y de F, il existe un unique x de E tel que $y = f(x)$, dans ce cas on peut définir x comme l'image de y par l'*application réciproque* de f notée f^{-1}. Dans un repère orthonormé, le graphe de f^{-1} est symétrique de celui de f par rapport à la bissectrice d'équation $y = x$.

Par exemple la fonction «racine carrée» est une bijection de $[0;+\infty[$ sur lui même, dont la réciproque est la fonction «carré», mais prise uniquement sur $[0;+\infty[$.

Définition 1.7 Paire. Une fonction est dite *paire*, si $\forall x \in D_f, -x \in D_f, f(-x) = f(x)$.

Définition 1.8 Impaire. Une fonction est dite *impaire*, si $\forall x \in D_f, -x \in D_f, f(-x) = -f(x)$.

I.2 Limite d'une fonction

I.2.1 Définitions

La notion de limite est très difficile à définir en termes rigoureux, il est d'ailleurs plus utile de comprendre quelle réalité concrète elle entend traduire, et comment en faire l'évaluation dans la pratique, plutôt que d'en saisir la définition formelle. Expérimentalement L est la limite au voisinage de a, de la fonction f lorsque la variable x se rapproche (en restant dans le domaine de f) de a, si «plus x est proche de a» alors «plus f est proche de L». En fait la définition formelle élargit cette idée.

Définition 1.9 Limite. $L = \lim\limits_{x \to a} f \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon]$.

Définition 1.10 Limite à droite. L est une limite de la fonction f, à *droite* de a (ou par valeurs supérieures, on écrira en a^+), si dans la définition de la limite, les hypothèses de l'implication sont complémentées par $x > a$.

Définition 1.11 Limite à gauche. On définit de même la limite à *gauche* par l'hypothèse supplémentaire $x < a$.

Exemple 1.1 *Soit $f(x) = x + \sqrt{x^2}/x$. Déterminer le domaine de définition de f, noté D_f, étudier la limite de f en 0^+, 0^- et simplifier f pour $x \in D_f$.*

I.2.2 Théorèmes relatifs aux limites

Théorème 1.1 Si au voisinage de a, fini ou non, si $f(x) \geq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} g = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f = +\infty$.

Théorème 1.2 Si au voisinage de a, fini ou non, si $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} g = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f = -\infty$.

Théorème 1.3 Si au voisinage de a, fini ou non, si $|f(x) - L| \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} g = 0$ alors $\lim\limits_{x \to a} f = L$.

Théorème 1.4 «Théorèmes des gendarmes», si au voisinage de a, fini ou non, si $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} h = \lim\limits_{x \to a} g = L$ alors $\lim\limits_{x \to a} f = L$.

Théorème 1.5 Fonction composée. Soit f l'application de E dans F et g l'application de F dans G et a, L, L' finis ou non, alors si $\lim\limits_{x \to a} f = L$ et $\lim\limits_{x \to L} g = L'$ alors $\lim\limits_{x \to a} gof = L'$.

Formes indéterminées : on ne peut rien affirmer sur certaines opérations, car suivant les limites de fonctions qu'elles peuvent représenter, les résultats peuvent être différents.

Théorème 1.6 Opération sur les limites. Avec les conventions de calcul sur $\pm\infty$, et surtout lorsque le membre de droite de ces égalités ne conduit pas à une forme indéterminée, on montre les résultats suivants (toutes les limites sont au même point) : $\lim(f+g) = \lim f + \lim g$, $\lim(fg) = \lim f \cdot \lim g$, $\lim(f/g) = \lim f / \lim g$.

On obtient alors le tableau suivant :

si f à pour limite	et si g a pour limite	alors $f+g$ a pour limite	alors fg a pour limite	f/g a pour limite
finie L	finie L'	$L+L'$	LL'	si $L' \neq 0$, L/L' si $L' = 0$, $\begin{cases} L \neq 0, \infty \\ L = 0, ? \end{cases}$
finie L	$+\infty$	$+\infty$	si $L > 0$, $+\infty$ si $L < 0$, $-\infty$ si $L = 0$, ?	0
$+\infty$	finie L'	$+\infty$	si $L' > 0$, $+\infty$ si $L' < 0$, $-\infty$ si $L' = 0$, ?	si $L' \geq 0$, $+\infty$ si $L' < 0$, $-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$+\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$	?
$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Tableau I.1 *Opérations relatives aux limites, le point d'interrogation «?» signifie que la limite est indéterminée.*

Exemple 1.2 *Calculer la limite $f(x) = 2x^3 - 5x$ pour $x \to \infty$. Montrer pour un polynôme de degré n défini par $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ avec a_n réel est différent de zéro, que* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f = \lim\limits_{x \to \pm\infty} a_n x^n$.

Théorème 1.7 Limite d'une fonction rationnelle. Lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, une *fonction rationnelle* a même limite que, le quotient de ses termes de plus haut degré.

Les formes indéterminées (nécessitant un calcul parfois difficile) sont :

$$0/0\,,\ \infty/\infty\,,\ 0\cdot\infty\,,\ 0^0\,,\ 1^\infty\,,\ +\infty-\infty\,,$$

indépendamment des signes. L'indétermination peut être levée de la manière suivante :

- un changement de variable sur la fonction f et utilisation du théorème 1.5,
- un changement de variable sur la valeur a où est évaluée la limite,
- pour une fonction comportant des radicaux, en multipliant la fonction f par son expression conjuguée,
- en utilisant un développement limité de la fonction au voisinage de la valeur a où est évaluée la limite,
- règle de l'Hospital : si une expression $f(x)/g(x)$ se présente sous la forme ∞/∞ ou $0/0$ pour $x = a$ et si $g'(a) \neq 0$, alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}\,. \tag{1.1}$$

Exemple 1.3 *Calculer* $\lim_{x \to 2} f$ *où* $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x}-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}}$, $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$, $\lim_{x \to 0^+} (x \ln x)$ *et* $\lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)^x$.

I.3 Continuité

Définition 1.12 Continuité. Une fonction f, définie au voisinage d'un réel a, est dite continue en a, si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ où L est un nombre fini et si $f(a) = L$.

Théorème 1.8 Continuité d'une fonction polynôme. Toute *fonction polynôme* est continue sur l'ensemble des réels.

Théorème 1.9 Continuité d'une fonction rationnelle. Une *fonction rationnelle* est continue sur son domaine de définition.

Théorème 1.10 Si f est continue sur $[a;b]$ et si $f(a)f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet *au moins* une solution dans $]a;b[$.

Théorème 1.11 Si f est continue et strictement monotone (croissante ou décroissante) sur $[a;b]$ et si $f(a)f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution *unique* dans $]a;b[$.

Exemple 1.4 *Montrer que l'équation* $f(x) = x^4 + 5x^3 - x^2 + x - 1$ *admet au moins une solution dans* $]0;1[$.

Théorème 1.12 Continuité d'une fonction composée. Si f est continue en a, et g continue en $f(a)$, alors gof est continue en a.

Exemple 1.5 *Montrer que* $f(x) = \sin(x^2 + x - 1)$ *est continue sur l'ensemble des réels.*

Théorème 1.13 Si f est continue et strictement croissante (resp. décroissante) sur $[a;b]$, alors f réalise une bijection de $[a;b]$ sur $[f(a);f(b)]$ (resp. $[f(b);f(a)]$).

Ce théorème est utilisée pour la définition des fonctions réciproques.

Définition 1.13 Prolongement par continuité. Si f n'admet pas de valeur en a mais admet une limite finie L en a, il suffit de poser $f_1(a) = L$ et $f_1(x) = f(x)$ pour $x \neq a$, pour que cette nouvelle fonction f_1 soit continue en a. On dit alors que f_1 est un *prolongement par continuité* de f en a.

Exemple 1.6 *Prolonger par continuité en zéro la fonction $f(x) = \sin(x)/x$.*

I.4 Dérivée

I.4.1 Définition

Définition 1.14 Dérivée en un point. Une fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si le taux d'accroissement de f en x, admet une limite finie quand x tend vers x_0 et on note

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ ou encore } f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{1.2}$$

Exemple 1.7 *Interprétation graphique de la dérivée et équation de la tangente en x_0.*

Théorème 1.14 Dérivabilité et continuité. Une fonction dérivable en x_0 est continue en x_0. La réciproque est *fausse*.

Exemple 1.8 *Donner les domaines de continuité et de dérivabilité de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$.*

Définition 1.15 Dérivée à droite, dérivée à gauche. Il se peut que le taux d'accroissement $[f(x) - f(x_0)]/(x - x_0)$ ait une limite à gauche seulement, on dit alors que f est dérivable à gauche, mais pas dérivable. On définit de même la dérivée à droite. Si les dérivées à droite et à gauche sont différentes, alors la fonction n'est pas dérivable.

Exemple 1.9 *Etudier en zéro la dérivée de la fonction $f(x) = |x|$.*

Théorème 1.15 Croissance et décroissance d'une fonction. Si f est une fonction dérivable sur l'intervalle $[a;b]$, alors f est *croissante* sur $[a;b]$, ssi $\forall x \in [a;b], f'(x) \geq 0$ et f est *décroissante* sur $[a;b]$, ssi $\forall x \in [a;b], f'(x) \leq 0$.

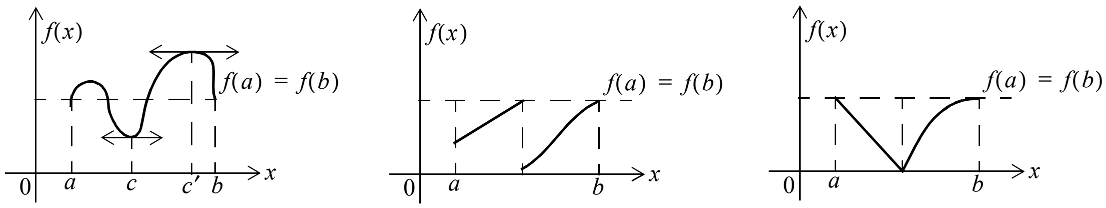
Si l'inégalité devient stricte alors f est *strictement* croissante ou décroissante. Si au point x_0, la dérivée existe et change de signe alors f présente en x_0 un extremum (minimum ou maximum).

Un point d'inflexion est un point pour lequel la courbe traverse la tangente, le théorème ci-dessous fournit une condition suffisante pour l'existence d'inflexion.

Théorème 1.16 Si f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle $[a;b]$, alors f est *convexe* sur $[a;b]$ ssi $f'' \geq 0$ et f est *concave* sur $[a;b]$ ssi $f'' \leq 0$. Si f'' s'annule et change de signe en x_0, alors f présente en x_0 un point d'*inflexion*.

Exemple 1.10 *Donner le point d'inflexion de la fonction* $f(x) = x^3$.

Théorème 1.17 Théorème de Rolle. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a;b]$, telle que $f(a) = f(b)$, si f est continue sur le segment $[a;b]$ et si f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, alors il existe *au moins* une valeur c de $]a, b[$ telle que $f'(c) = 0$.



f non continue *f non dérivable*

Figure I.1 *Illustration du théorème de Rolle.*

Théorème 1.18 Théorème des accroissement finis. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a;b]$, si f est continue sur le segment $[a;b]$ et si f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, alors il existe *au moins* une valeur c de $]a, b[$ telle que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

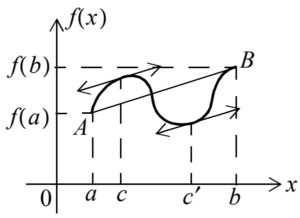


Figure I.2 *Interprétation graphique du théorème des accroissements finis. Graphiquement ce théorème signifie, que pour une fonction dérivable, entre deux points A et B de la courbe représentative, il y a au moins un point C où la tangente est parallèle à la droite (AB).*

I.4.2 Dérivées usuelles

f et g sont des fonctions de x.

Fonctions	Dérivées	Fonctions	Dérivées
$\cos x$		$\ln f$	
$\sin x$		$\exp(f)$	
$\tan x$		f^g	
$f + g$		fog	
fg		f^{-1}	
f/g		$arc\tan(x)$	

$\sqrt{f}$		$arc\cos(x)$	
f^p			

Tableau I.2 *Dérivées usuelles.*

I.4.3 Développement limité

Théorème 1.19 Formule de Taylor. Si f est n fois dérivable au voisinage de x_0, alors elle admet un développement limité suivant à l'ordre n :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + o((x - x_0)^n) . \tag{1.3}$$

Notation de Landau : on note $y(x) = o((x - x_0)^n)$ si $\lim_{x \to x_0}[y(x)/(x - x_0)^n]$ est nulle. La formule de Mac-Laurin est obtenue pour $x_0 = 0$. Le tableau ci-dessous donne les développements limités de quelques fonctions.

Fonctions	Développement limité en zéro
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
$\exp(x)$	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

Tableau I.3 *Développement limité en zéro de quelques fonctions.*

Exemple 1.11 *Calculer le développement limité de la fonction* $\exp(x)$.

Exemple 1.12 *Calculer le développement limité de la fonction* $1/(1+x)$ *sachant que* $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \ldots + (-1)^n x^n/n + o(x^n)$.

Exemple 1.13 *Développer* $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$ *à l'ordre* 3 *en* 0 *sachant que* $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 - x^2/8 + x^3/16 + o(x^3)$. *Calculer le développement limité de la fonction* $\tan x$ *à l'ordre* 5 *sachant que* $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! + o(x^5)$ *et* $\cos x = (\sin x)'$.

I.5 Calcul intégral

I.5.1 Intégrale définie

Définition 1.16 Intégrale définie. Soit un axe orienté Ox sur lequel on place deux points A_1 et A_2 d’abscisses respectives a_1 et a_2 ($a_2 > a_1$). Divisons le segment $[A_1A_2]$ en petits segments à l’aide des points arbitraires d’abscisses successives x_1, x_2, …, x_{n-1} et considérons les abscisses ξ_1, ξ_2, …, ξ_n situées respectivement dans les intervalles $[a_1;x_1]$, $[x_1;x_2]$, …, $[x_{n-1};a_2]$. Considérons maintenant une fonction $f(x)$ *définie* et *continue* sur $[a_1;a_2]$; au point d’abscisse ξ_n, elle prend la valeur $y_n = f(\xi_n)$.

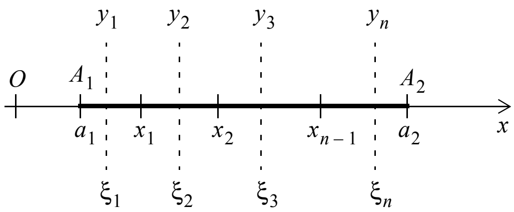


Figure I.3 *Définition d’une intégrale définie.*

A la fonction f, on associe la somme S_n (qui est une *somme de Riemann*) :

$$S_n = y_1(x_1 - a_1) + y_2(x_2 - x_1) + \ldots + y_n(a_2 - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{i=n} y_i \Delta x_i \tag{1.4}$$

avec $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $x_0 = a_1$ et $x_n = a_2$. La limite lorsqu’elle existe, de S_n quand n tend vers l’infini et que tous les Δx_i du partage de $[A_1A_2]$ tendent vers zéro est appelée *intégrale définie* de $f(x)$ sur l’intervalle d’intégration $[a_1;a_2]$; elle s’écrit :

$$I = \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{i=n} y_i \Delta x_i , \tag{1.5}$$

où a_1 et a_2 sont les *bornes* (inférieure et supérieure) d’intégration et dx l’*élément différentiel* d’intégration.

Une autre représentation possible est de considérer la courbe Γ représentative de la fonction $f(x) = y$.

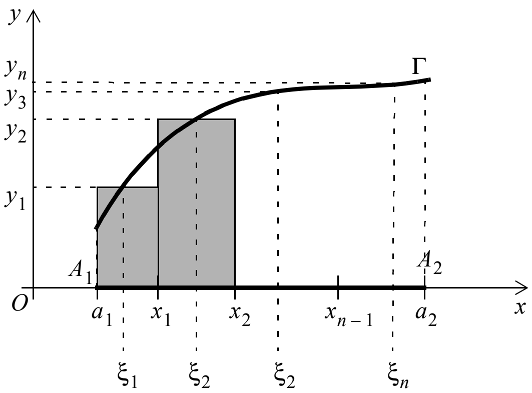


Figure I.4 *Signification graphique d’une intégrale définie.*

Dans ce cas, le premier terme $y_1(x_1 - a_1)$ de la série S_n représente l'aire du rectangle de largeur $(x_1 - a_1)$ et de hauteur y_1. Dans le cas où y est positif, la somme S_n représente une valeur *approchée* de l'aire du domaine D limité par Γ, l'axe Ox et les droites d'équation $x = a_1$ et $x = a_2$. Lorsque $n \to \infty$, la limite de S_n correspond *exactement* à l'aire du domaine D.

I.5.2 Propriétés générales des intégrales définies

Si f est une fonction définie et continue sur $[a;b]$ ($a < b$), alors

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx . \tag{1.6}$$

Lorsque $c \in [a;b]$ et si f est intégrable sur $[a;c]$ et $[c;b]$, on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx . \tag{1.7}$$

Si λ est une constante, on peut écrire

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx \tag{1.8}$$

Dans le cas où la fonction f est paire et impaire, on a respectivement

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx \quad \text{et} \quad \int_{-a}^a f(x)dx = 0 . \tag{1.9}$$

Si deux fonctions f et g sont intégrables sur $[a;b]$ alors :

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx . \tag{1.10}$$

Définition 1.17 Relation entre intégrale et primitive. On appelle primitive de la fonction $f(x)$ définie et continue, toute fonction $F(x)$ telle que :

$$F'(x) = \frac{dF}{dx} = f(x) . \tag{1.11}$$

Si une fonction $f(x)$ admet une primitive, elle en admet alors une *infinité* : $F(x) + C$ où C est une constante arbitraire.

Théorème 1.20 Si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$, alors : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

I.5.3 Méthodes usuelles d'intégration

Si la détermination de $\int f(x)dx$ n'est pas immédiate, un changement de variable $x = g(t)$ avec $dx = dg = g'(t)dt$ peut conduire à :

$$\int f(x)dx = \int f[g(t)]g'(t)dt = \int \phi(g)dg, \tag{1.12}$$

où $\phi(g)$ possède une primitive connue. Pour les intégrales bornées on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[g(t)]g'(t)dt \text{ avec } \begin{cases} a = g(\alpha) \\ b = g(\beta) \end{cases}. \tag{1.13}$$

Intégration par partie : soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions dérivables de x telles que : $f(x) = u(x)v'(x)$, on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx. \tag{1.14}$$

Exemple 1.14 *Calculer* $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$. *Calculer une primitive de* $\ln(x)$ *pour* $x \in]0;+\infty[$.

I.5.4 Méthodes spécifiques d'intégration

I.5.4.1 Intégration des fonctions rationnelles

<u>Définition</u>

On appelle fonction rationnelle le rapport $N(x)/D(x)$ de deux polynômes $N(x)$ et $D(x)$ de degrés respectifs n et d.

Pour $n \geq d$, on effectue au préalable la division :

$$\frac{N(x)}{D(x)} = E(x) + \frac{R(x)}{D(x)}, \tag{1.15}$$

où $E(x)$ est appelée partie entière et où le degré r de $R(x)$ est tel que $r < d$. L'intégrale de $E(x)$ s'obtient alors facilement en appliquant la relation

$$\int x^n dx = C + \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ avec } n+1 \neq 0. \tag{1.16}$$

Cas où D possède des racines simples réelles

Dans le cas où les N racines $\{x_n\}$ de $D(x) = 0$ sont *simples* et *réelles* on écrit :

$$\frac{R(x)}{D(x)} = \sum_{n=1}^{n=N} \frac{A_n}{x - x_n}. \tag{1.17}$$

Les éléments de la somme sont appelés *éléments simples de première espèce*. Les constantes $\{A_n\}$ sont calculées soit en identifiant les puissances égales à x où en calculant la limite suivante

$$\lim_{x \to x_n} \left[\frac{R(x)}{D(x)}(x - x_n)\right] = A_n. \tag{1.18}$$

La primitive de $R(x)/D(x)$ est alors

$$\int \frac{R(x)}{D(x)} dx = C + \sum_{n=1}^{n=N} A_n \ln|x - x_n|. \tag{1.19}$$

Exemple 1.15 *Montrer que* $(2x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 8x + 6)/(x^2 - 3x + 2) = 2x^2 + 3 + x/(x^2 - 3x + 2)$ *, et décomposer en éléments simples. En déduire une primitive sur son domaine de définition.*

Cas où D possède une racine multiple réelle

Dans le cas où la racine x_1 de $D(x) = 0$ est *réelle*, *unique* mais *multiple* d'ordre M on écrit :

$$\frac{R(x)}{D(x)} = \sum_{m=1}^{m=M} \frac{B_m}{(x - x_1)^m}. \tag{1.20}$$

Les constantes $\{B_m\}$ sont calculées soit en identifiant les puissances égales à x où en calculant les limites suivantes

$$B_M = \lim_{x \to x_1} \left[\frac{R(x)}{D(x)}(x - x_1)^M\right], \tag{1.21}$$

$$B_{M-1} = \lim_{x \to x_1} \frac{d}{dx}\left[\frac{R(x)}{D(x)}(x - x_1)^M\right], \tag{1.22}$$

$$B_{M-m} = \frac{1}{m!} \lim_{x \to x_1} \frac{d^m}{dx^m}\left[\frac{R(x)}{D(x)}(x - x_1)^M\right]. \tag{1.23}$$

On intègre alors terme à terme sachant que

$$\int \frac{A}{(x-x_1)^m}dx = C + \frac{(x-x_1)^{1-m}}{1-m} \text{ avec } m \neq 1 . \tag{1.24}$$

Exemple 1.16 *Décomposer en éléments simples la fonction* $f(x) = x/(x-2)^2$ *et en déduire une primitive.*

Cas où D possède des racines multiples réelles

Dans le cas où les N racines $\{x_i\}$ de $D(x) = 0$ sont *réelles* et *multiples* d'ordre M on écrit :

$$\frac{R(x)}{D(x)} = \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{m=1}^{m=M} \frac{A_{nm}}{(x-x_n)^m} . \tag{1.25}$$

Les constantes $\{A_{nm}\}$ sont calculées en identifiant les puissances égales à x. Néanmoins certaines valeurs de A_{nm} peuvent être déterminées en utilisant les équations précédentes.

Cas où D possède des racines simples complexes

Si $D(x) = 0$ admet des *racines complexes simples*, elles sont obligatoirement conjuguées deux à deux. Pour N racines $\{x_i = \alpha_i + j\beta_i, \bar{x}_i = \alpha_i - j\beta_i\}$, la décomposition prend alors la forme

$$\frac{R(x)}{D(x)} = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{A_i x + B_i}{(x-x_i)(x-\bar{x}_i)} = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{A_i x + B_i}{x^2 + \alpha_i^2 + \beta_i^2 - 2x\alpha_i} . \tag{1.26}$$

Les éléments de la somme sont appelés *éléments simples de seconde espèce*. De plus on peut écrire

$$x^2 + \alpha_i^2 + \beta_i^2 - 2x\alpha_i = (x-\alpha_i)^2 + \beta_i^2 = \beta_i^2\left[1 + \left(\frac{x-\alpha_i}{\beta_i}\right)^2\right] . \tag{1.27}$$

Par conséquent le changement de variable $t = (x-\alpha_i)/\beta_i$ où $dt = dx/\beta_i$ conduit à

$$\int \frac{R(x)}{D(x)}dx = \frac{1}{\beta_i}\int \frac{A_i(t\beta_i + \alpha_i) + B_i}{1+t^2}dt = A_i \int \frac{tdt}{1+t^2} + \frac{A_i\alpha_i + B_i}{\beta_i}\int \frac{dt}{1+t^2} . \tag{1.28}$$

soit

$$\int \frac{R(x)}{D(x)}dx = C + \frac{A_i}{2}\ln\left|1+t^2\right| + \frac{A_i\alpha_i + B_i}{\beta_i} arc\tan(t) \text{ avec } t = \frac{x-\alpha_i}{\beta_i} . \tag{1.29}$$

Exemple 1.17 *Calculer une primitive de* $x/(x^2 - 4x + 5)$.

Dans le cas général, où l'équation $D(x) = 0$ possède à la fois des racines réelles et complexes, la décomposition est une combinaison des décompositions précédentes.

I.5.4.2 Intégration des fonctions trigonométriques

Fonction rationnelle en sin(x) et cos(x)

Les intégrales sont de la forme

$$\int R(\sin x,\ \cos x)dx\ =\ \int f(x)dx\,, \tag{1.30}$$

où R est une fonction rationnelle. Lorsque les conditions suivantes (règle de Bioche) sont vérifiées :
- $f(-x)d(-x)\ =\ f(x)dx$, on pose $t\ =\ \cos x$;
- $f(\pi-x)d(\pi-x)\ =\ f(x)dx$, on pose $t\ =\ \sin x$;
- $f(\pi+x)d(\pi+x)\ =\ f(x)dx$, on pose $t\ =\ \tan x$;

D’une façon générale, il est toujours possible d’effectuer le changement de variable $t\ =\ \tan(x/2)$.

Comme $\sin x\ =\ \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x\ =\ \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $dt = \dfrac{dx}{2}\left[1+tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\right] \Rightarrow dx\ =\ \dfrac{2dt}{1+t^2}$, on se ramène ainsi à l’intégration d’une fonction rationnelle. (1.31)

Exemple 1.18 *Calculer une primitive de* $1/\sin x$ *en utilisant deux méthodes : la règle de Bioche et en posant* $t\ =\ \tan(x/2)$.

Fonction rationnelle en tan(x)

Dans ce cas on pose :

$$t\ =\ \tan x\ \text{ avec }\ dt\ =\ dx(1+t^2) \tag{1.32}$$

Intégrales de la forme $sin^m(x)cos^n(x)$ avec m et n entiers positifs

- Si m et n sont pairs : on linéarise l’expression en exprimant $sin^m(x)cos^n(x)$ en fonction des sinus et cosinus des arcs multiples de x . Pour des valeurs de m , n grandes on utilise les formules d’Euler et le triangle de Pascal.
- Si m ou n sont impairs : pour m impair, on pose $t\ =\ \cos x$. Pour n impair, on pose $t\ =\ \sin x$.

Exemple 1.19 *Calculer la primitive de* $sin^4(x)$.

I.5.5 Intégrales généralisées

Définition 1.18 Intégrale généralisée. On dit que $\int_a^b f(x)dx$ est une intégrale généralisée (ou impropre), si l’un des deux cas suivants est réalisé :

- Premier cas : $f(x)$ devient infinie pour $x\ =\ c \in [a;b]$

L’intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est convergente ou a un sens si :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx \right\} \text{ existe.} \tag{1.33}$$

- Second cas : l’intervalle d’intégration est infini

L’intégrale $\int_a^{\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ et $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ sont convergentes ou ont un sens si respectivement :

$$\lim_{b \to \infty} \left[\int_a^b f(x)dx \right], \lim_{a \to -\infty} \left[\int_a^b f(x)dx \right] \text{ et } \lim_{\substack{b \to \infty \\ a \to -\infty}} \left[\int_a^b f(x)dx \right] \text{ existent.} \tag{1.34}$$

Exemple 1.20 *Calculer l’intégrale* $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}}$.

I.5.6 Intégrale fonction d’un paramètre

Définition 1.19 Intégrale fonction d’un paramètre. Une intégrale dépend d’un paramètre u (indépendant de la variable d’intégration x) si elle se présente sous la forme

$$F(u) = \left[\int_a^b f(x, u)dx \right]. \tag{1.35}$$

Si $f(x, u)$ est continue par rapport au couple (x, u) et si $\partial f / \partial u$ existe, alors :

$$F'(u) = \frac{dF}{du} = \left[\int_a^b \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx \right]. \tag{1.36}$$

De la même manière l’intégrale de $F(t)$ sur $[c;d]$ s’écrit :

$$\int_c^d F(u)du = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, u)dx \right] du = \left[\int_a^b \left[\int_c^d f(x, u)du \right] dx \right]. \tag{1.37}$$

Exemple 1.21 *Montrer par récurrence que* $\int_0^{\infty} x^n \exp(-ax)dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$ *avec* $a > 0$ *et* $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

I.6 Equation différentielle

Définition 1.20 Equation différentielle du n-ième ordre. On appelle équation différentielle du n-ième ordre, vérifiée par une fonction $y(x)$, une relation de la forme :

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = 0 , \tag{1.38}$$

où x est la variable indépendante.

On appelle *solution* ou intégrale de l'équation différentielle toute fonction $y = f(x)$ qui vérifie l'équation précédente; la solution générale est une fonction $y = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ comportant n *constantes arbitraires*. Ces constantes sont déterminées par des *conditions particulières* qui sont les valeurs prises par y, dy/dx, $\ldots$, $d^{n-1}y/dx^{n-1}$ pour une valeur donnée de x ; si $x = 0$, les conditions sont dites *conditions initiales*.

De plus, si les différentes dérivées $d^{n-1}y/dx^{n-1}$ sont du premier degré et ne se multiplient pas entres elle alors l'équation différentielle est dite *linéaire*.

I.6.1 Equation différentielle linéaire du premier ordre

1. Equation de la forme $dy/dx = f(x)$

L'ensemble des solutions est donné par

$$y(x) = \int f(x)dx + C \text{, où } C \text{ est une constante arbitraire.} \tag{1.39}$$

2. Equation à variables séparables $dy/dx = g(x)/h(y)$

On peut écrire $h(y)dy = g(x)dx$. Les solutions sont donc

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + C \text{, où } C \text{ est une constante arbitraire.} \tag{1.40}$$

3. Equation homogène $dy/dx = \Psi(y/x)$

On pose $y/x = t$, d'où

$$\frac{dy}{dx} = \Psi(t) . \tag{1.41}$$

De plus

$$y = tx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(tx) = x\frac{dt}{dx} + t\frac{dx}{dx} = x\frac{dt}{dx} + t , \tag{1.42}$$

donc

$$x\frac{dt}{dx} + t = \Psi(t) . \tag{1.43}$$

On est alors ramené à une nouvelle équation différentielle qui est à variables séparables :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{\Psi(t) - t}, \text{ d'où } \ln|x| = \int \frac{dt}{\Psi(t) - t} + C. \tag{1.44}$$

Exemple 1.22 *Intégrer l'équation différentielle* $dy/dx = (x-y)/(x+y)$.

4. Equations linéaires à coefficients variables

Définition 1.21 Une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients variables est définie par

$$a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = f(x). \tag{1.45}$$

Dans tout intervalle, où $a(x)$ ne s'annule pas, l'équation précédente prend la forme :

$$\frac{dy}{dx} + B(x)y = \Phi(x) \text{ avec } B(x) = \frac{b(x)}{a(x)} \text{ et } \Phi(x) = \frac{f(x)}{a(x)}. \tag{1.46}$$

$\Phi(x)$ désigne le *second membre* de l'équation *complète* (ou équation *avec* second membre). $dy/dx + B(x)y = 0$ est l'équation *homogène associée* (ou équation *sans* second membre).

La solution générale de l'équation différentielle complète s'écrit :

$$y = y_H + y_P, \tag{1.47}$$

où y_H est la solution de l'équation homogène et y_P une solution particulière de l'équation *avec* second membre.

On a donc pour y_H :

$$\frac{dy_H}{dx} + B(x)y_H = 0, \tag{1.48}$$

qui s'écrit avec $y_H \neq 0$:

$$\frac{dy_H}{y_H} = -B(x)dx \text{ soit } \ln|y_H| = -\int B(x)dx + C_1, \text{ où } C_1 \text{ est une constante arbitraire.} \tag{1.49}$$

Donc

$$y_H = Cu(x) \text{ et } u(x) = \exp\left(-\int B(x)dx\right). \tag{1.50}$$

On peut remarquer que $y_H \neq 0$ car la fonction exponentielle est toujours différente de zéro.

Pour la recherche de y_P, on utilise la méthode de «*la variation de la constante*» de Lagrange qui consiste à considérer la constante C de la solution $y_H = Cu(x)$ comme une fonction inconnue de la variable x. Ainsi

$$y_P = C(x)u(x) \text{ et } \frac{dy_P}{dx} = C\frac{du}{dx} + u\frac{dC}{dx}. \tag{1.51}$$

En portant cette équation dans l'équation différentielle *complète*, il vient :

$$C(x)\left[\frac{du}{dx} + B(x)u(x)\right] + u(x)\frac{dC}{dx} = \Phi(x)\,. \tag{1.52}$$

Comme $Cu(x)$ vérifie l'équation homogène, on a : $du/dx + B(x)u(x) = 0$ qui implique

$$\frac{dC}{dx} = \frac{\Phi(x)}{u(x)}\text{, d'où } C(x) = \int\frac{\Phi(x)}{u(x)}dx + K \text{ où } K \text{ est une constante arbitraire.} \tag{1.53}$$

Ainsi

$$y_P = \left[\int\frac{\Phi(x)}{u(x)}dx + K\right]u(x)\,. \tag{1.54}$$

La solution générale est donc

$$y = y_H + y_P = Cu(x) + \left(\int\frac{\Phi(x)}{u(x)}dx + K\right)u(x) = u(x)\left[\int\frac{\Phi(x)}{u(x)}dx + K_1\right] \text{ avec } K_1 = C + K = cste\,. \tag{1.55}$$

Exemple 1.23 *Résoudre l'équation différentielle* $(1 + x^2)dy/dx + xy = x$.

I.6.2 Equation différentielle linéaire du second ordre

<u>Equation de la forme $d^2y/dx^2 = f(x)$</u>

Deux intégrations successives donnent alors

$$\frac{dy}{dx} = \int f(x)dx + K = \psi(x) + K_1 \text{ et } y = \int\psi(x)dx + K_1x + K_2\,. \tag{1.56}$$

<u>Equation de la forme $d^2y/dx^2 = f(y)$</u>

On multiple les deux membres par $2(dy/dx)dx$; ainsi :

$$2\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx}dx = 2f(y)\frac{dy}{dx}dx\,, \tag{1.57}$$

soit

$$d\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = 2f(y)dy \text{ car } \frac{d}{dx}\{f^2[g(x)]\} = 2\frac{dg}{dx}f'[g(x)]\,. \tag{1.58}$$

Par intégration, on obtient :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\int f(y)dy + C_1 \text{ soit } \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2\int f(y)dy + C_1}\,. \tag{1.59}$$

Les variables étant séparables, on peut écrire :

$$dx = \frac{dy}{\pm\sqrt{2\int f(y)dy + C_1}}, \tag{1.60}$$

donc

$$x = \int \frac{dy}{\pm\sqrt{2F(y) + C_1}} + C_2 \text{ avec } F(y) = \int f(y)dy. \tag{1.61}$$

Equations différentielles linéaires à coefficients constants

Définition 1.22 La forme générale d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants s'écrit :

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + c = \Phi(x), \tag{1.62}$$

où a, b et c sont des *constantes*. $\Phi(x)$ désigne le *second membre* de l'équation *complète* (ou équation *avec* second membre). $a(d^2y/dx^2) + b(dy/dx) + c = 0$ est l'équation *homogène associée* (ou équation *sans* second membre).

Comme précédemment la solution générale de l'équation différentielle complète s'écrit :

$$y = y_H + y_P, \tag{1.63}$$

où y_H est la solution générale de l'équation *homogène* et y_P une solution particulière de l'équation *avec* second membre.

On a donc pour y_H :

$$a\frac{d^2y_H}{dx^2} + b\frac{dy_H}{dx} + c = 0, \tag{1.64}$$

On cherche alors des solutions de la forme $y_H = e^{rx}$. L'équation homogène devient alors $e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$. Comme e^{rx} est toujours différent de zéro, la relation précédente n'est satisfaite, quelque soit x, que si r est racine de l'équation du second degré :

$$ar^2 + br + c = 0, \tag{1.65}$$

appelée équation caractéristique de l'équation différentielle. On distingue trois cas selon le signe du discriminant $\Delta^2 = b^2 - 4ac$ (tableau I.1).

La solution de l'équation homogène précédente peut, dans les trois cas, s'écrire sous la forme générale : $y_H = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, où C_1 et C_2 sont des constantes et $y_1(x)$, $y_2(x)$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène.

Condition	Solution de l'équation caractéristique	y_H
$\Delta > 0$	2 racine réelles : $r_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = -\lambda \pm \Omega$ avec $\lambda = \dfrac{b}{2a}$ et $\Omega = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$y_H = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ $= e^{-\lambda x}(C_1 e^{\Omega x} + C_2 e^{-\Omega x})$
$\Delta = 0$	1 racine double : $r_1 = r_2 = -\dfrac{b}{2a} = -\lambda$	$y_H = e^{-\lambda x}(C_1 + C_2 x)$
$\Delta < 0$	2 racine réelles conjuguées : $r_{1,2} = \dfrac{-b \pm j\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a} = -\lambda \pm j\omega$ avec $\lambda = \dfrac{b}{2a}$ et $\omega = \dfrac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$	$y_H = e^{-\lambda x}[C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)]$

Tableau I.1 *Expression de y_H pour une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.*

La recherche de la solution particulière y_P s'effectue en utilisant la méthode de la *variation de la constante*. On considère alors C_1 et C_2 comme des *fonctions inconnues de la variable x*. Dans ce cas :

$$y_P = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \text{ et } \frac{dy_P}{dx} = C_1\frac{dy_1}{dx} + C_2\frac{dy_2}{dx} + \left(y_1\frac{dC_1}{dx} + y_2\frac{dC_2}{dx}\right). \tag{1.66}$$

Comme on cherche des solutions *particulières*, on impose aux fonction C_1 et C_2 la condition

$$y_1\frac{dC_1}{dx} + y_2\frac{dC_2}{dx} = 0, \tag{1.67}$$

il en résulte

$$\frac{d^2y_P}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(C_1\frac{dy_1}{dx} + C_2\frac{dy_2}{dx}\right) = \frac{dy_1}{dx}\frac{dC_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}\frac{dC_2}{dx} + \frac{d^2y_1}{dx^2}C_1 + \frac{d^2y_2}{dx^2}C_2. \tag{1.68}$$

En remplaçant dans l'équation différentielle homogène *complète* on a :

$$a\left(\frac{dy_1}{dx}\frac{dC_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}\frac{dC_2}{dx} + \frac{d^2y_1}{dx^2}C_1 + \frac{d^2y_2}{dx^2}C_2\right) + b\left(\frac{dy_1}{dx}C_1 + \frac{dy_2}{dx}C_2\right) + c = \Phi(x), \tag{1.69}$$

Comme $C_1y_1(x)$ et $C_2y_2(x)$ vérifient l'équation homogène, on a :

$$\begin{cases} a\dfrac{d^2y_1}{dx^2}C_1 + b\dfrac{dy_1}{dx}C_1 + c = 0 \\ a\dfrac{d^2y_2}{dx^2}C_2 + b\dfrac{dy_2}{dx}C_2 + c = 0 \end{cases}. \tag{1.70}$$

Donc

$$a\left(\frac{dy_1}{dx}\frac{dC_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}\frac{dC_2}{dx}\right) - c = \Phi(x). \tag{1.71}$$

On obtient alors le système différentiel à deux inconnues $\{C_1, C_2\}$ suivant :

$$\begin{cases} y_1\dfrac{dC_1}{dx} + y_2\dfrac{dC_2}{dx} = 0 \\ a\left(\dfrac{dy_1}{dx}\dfrac{dC_1}{dx} + \dfrac{dy_2}{dx}\dfrac{dC_2}{dx}\right) = \Phi(x) + c \end{cases}. \tag{1.72}$$

Cette méthode de la variation des constantes reste valable si les coefficients a, b, c dépendent de la variable x. On obtient alors le tableau I.2.

Forme du second membre	Forme de la solution particulière
$\Phi(x) = P(x)$, où P est un polynôme de degré n.	y_P est un polynôme de degré : - n, si $c \neq 0$. - $n+1$, si $c = 0$ et $b \neq 0$. - $n+2$, si $c = 0$ et $b = 0$.
$\Phi(x) = \Phi_0 e^{\beta x}$, où Φ_0 est une constante.	- Si β n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors $y_P = Ce^{\beta x}$. - Si β est racine simple : $y_P = Cxe^{\beta x}$. - Si β est racine double : $y_P = Cx^2e^{\beta x}$
$\Phi(x) = \Phi_1\cos(\beta x) + \Phi_2\cos(\beta x)$.	$y_P = C_1\cos(\beta x) + C_2\cos(\beta x)$.
$\Phi(x) = P(x)e^{\beta x}$, où P est un polynôme de degré n.	$y_P = x^kQ(x)e^{\beta x}$, où Q est un polynôme de degré n et : - $k = 0$, si β n'est pas racine de l'équation caractéristique. - $k = 1$, si β est racine simple. - $k = 2$, si β est racine double.

Tableau I.2 *Forme de la solution particulière pour une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.*

A noter que les coefficients constants de la solution particulière y_P sont calculés, par *identification*, à partir des coefficients de l'équation différentielle. Les constantes d'intégrations qui apparaissent dans l'expression de y_H doivent être déterminées en appliquant les conditions initiales à la solution générale complète $y = y_H + y_P$ et non simplement à la solution générale de l'équation homogène associée y_H.

Exemple 1.24 *Résoudre l'équation différentielle* $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = xe^x$.

I.6.3 Transformée de Laplace

Pour des signaux causaux, c'est-à-dire définis pour $x \geq 0$ (dans ce cas la variable x est notée t correspondant au temps et donc à des signaux rencontrés en physique), la transformée de Laplace est un outil très puissant pour résoudre les équations différentielles. Dans cette partie, nous donnerons uniquement les résultats principaux nécessaires à la résolution d'une équation différentielle, car la transformée de Laplace sera étudiée en détail dans les cours de signal et d'analyse fonctionnelle.

Définition 1.23 Transformée de Laplace monolatérale. Pour une fonction f définie pour $t \geq 0$, la transformée de Laplace monolatérale, notée F, s'écrit

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)\exp(-pt)dt, \tag{1.73}$$

où p est appelée variable de Laplace. Dans la suite, on supposera que l'intégrale est convergente. Ainsi à partir de la définition, on montre les résultats donnés dans le tableau I.3.

$f(t)$ pour $t \geq 0$	Forme de la solution particulière
1 (fonction échelon notée $u(t)$)	$\frac{1}{p}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{-ax}.	$1/(p+a)$
$\sin(\omega t)$	$\omega/(p^2+\omega^2)$
$\cos(\omega t)$	$p/(p^2+\omega^2)$
$\frac{df}{dt}$	$pF(p) - f(0)$
$\frac{d^2f}{dt^2}$	$p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$.
$t^n f(t)$ avec n entier positif	$(-1)^n\frac{d^nF}{dp^n}$.

Tableau I.3 *Transformées de Laplace usuelles.*

Exemple 1.25 *Calculer la transformée de Laplace de 1,* e^{-ax}, $\cos(ax)$ *et* $\sin(ax)$.

Exemple 1.26 *Résoudre l'équation différentielle* $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = xe^x$ *avec* $y(0) = y'(0) = 0$ *en utilisant la transformée de Laplace.*

En appliquant la transformée de Laplace sur les membres de droite et de gauche on a :

$$[p^2 Y(p) - y(0) - y'(0)] - 4[pY(p) - y(0)] + 3Y(p) = -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p-1}\right) , \tag{1.74}$$

soit

$$p^2 Y(p) - 4pY(p) + 3Y(p) = \frac{1}{(p-1)^2} . \tag{1.75}$$

Donc

$$Y(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p^2-4p+3)} = \frac{1}{(p-1)^2(p-1)(p-3)} = \frac{1}{(p-1)^3(p-3)} . \tag{1.76}$$

Afin de se ramener à des formes connues, une décomposition en élément simple est effectuée; donc

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{a}{(p-1)^3} + \frac{b}{(p-1)^2} + \frac{c}{p-1} + \frac{d}{p-3} \\ &= \frac{1}{8}\left[-\frac{4}{(p-1)^3} - \frac{2}{(p-1)^2} - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-3}\right] \end{aligned} . \tag{1.77}$$

On obtient alors la solution temporelle en utilisant le tableau dans le sens inverse, d'où :

$$y(t) = \frac{1}{8}(-2t^2e^t - 2te^t - e^t + e^{3t}) = -\frac{1}{8}e^t(2t^2 + 2t + 1) + \frac{e^{3t}}{8} \text{ avec } t \geq 0 . \tag{1.78}$$

car

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p-1}\right) = -\frac{1}{(p-1)^2} \text{ et } \frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{1}{p-1}\right) = \frac{2}{(p-1)^3} . \tag{1.79}$$

CHAPITRE II

Fonction de plusieurs variables réelles

II.1 Fonctions de deux variables

Définition 2.1 Fonction de deux variables. On dit que z est une fonction à deux variables x_1, x_2 lorsqu'on peut faire correspondre à tout couple de nombre x_1, x_2 une valeur z.

Exemple 2.1 *Le produit des facteurs x_1, x_2 est fonction de deux variables x_1 et x_2. Les valeurs de x_1 et x_2 peuvent être arbitraires. On note alors $z = f(x_1, x_2) = x_1 x_2$.*

Le couple de valeurs x_1, x_2 est représenté géométriquement par le point $M(x_1, x_2)$ rapporté au système de coordonnées rectangulaires (Ox, Oy).

Définition 2.2 Domaine. Si f est une fonction on appelle *domaine de définition* l'ensemble des réels x_1 et x_2 pour lesquels $f(x_1, x_2)$ existe.

Exemple 2.2 *Donner le domaine de définition de la fonction $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.*

Il n'est pas exclu que la valeur de la fonction $f(x_1, x_2)$ varie en fonction de x_1, mais reste inchangée quand x_2 varie. La fonction de deux variables peut être alors considérée comme la fonction de la seule variable x_1. Si par contre la valeur de $f(x_1, x_2)$ reste la même pour toutes les valeurs des deux variables, la fonction est une constante.

II.2 Fonction de trois et plusieurs variables.

Les notions de fonctions de trois, quatre, etc., variables et de domaines de définition sont introduites de la même manière que dans le cas de deux variables.

Le domaine de définition d'une fonction f de trois variables x_1, x_2 et x_3 est représentée par un ensemble de points de l'espace et on note $z = f(x_1, x_2, x_3)$.

Une fonction de deux ou d'un plus grand nombre de variables peut être donnée par une formule (ou par plusieurs formules pour des systèmes couplés par exemple) sous forme *explicite* ou *implicite*.

Exemple 2.3 *Si* $x_1x_2 = A + x_3$ *où* A *est une constante, chacune des variables est une fonction implicite des deux autres. Si maintenant* $x_1 = (A + x_3)/x_2$ *alors* x_1 *est une fonction explicite des deux variables* x_3 *et* x_2.

Exemple 2.4 *La fonction* $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{A^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$ *définie une fonction à trois variables. La fonction existe si* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le A^2$ *correspondant à l'ensemble de tous les points situés à l'intérieur de la surface d'une sphère de rayon* A *et de centre à l'origine des coordonnées.*

II.3 Limite d'une fonction

La notion de limite d'une fonction de plusieurs variables est introduite de la même façon que pour une fonction d'une seule variable. Pour fixer les idées considérons le cas d'une fonction de deux variables.

Définition 2.3 Limite. Le nombre L est appelé limite de la fonction $z = f(x_1, x_2)$ au point $M_0(x_{10}, x_{20})$ si z se rapproche indéfiniment de L chaque fois que le point $M(x_1, x_2)$ se rapproche indéfiniment du point M_0. On note

$$\lim_{M \to M_0} f(x_1, x_2) = \lim_{\substack{x_1 \to x_{10} \\ x_2 \to x_{20}}} f(x_1, x_2) = L. \tag{2.1}$$

Rigoureusement la limite est définie par :

Définition 2.4 Limite. Le nombre L est appelé *limite* de la fonction $f(x_1, x_2)$ au point $M_0(x_{10}, x_{20})$ si la valeur absolue de la différence $f(x_1, x_2) - L$ reste inférieure à tout nombre strictement positif ε fixé d'avance dès que la distance $M_0M = \sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2}$ du point M_0 au point M (non confondu avec M_0) est inférieure au nombre strictement positif δ (dépendant de ε).

Exemple 2.5 *Si* $M_0(0, 0)$, *alors* $\lim\limits_{M \to M_0} \sin x_1 \sin x_2 = 0$, $\lim\limits_{M \to M_0} (x_1 \ln x_1)(x_2 \ln x_2) = 0$.

La limite d'une fonction de plusieurs variables se définit de la même manière.

II.4 Continuité d'une fonction

Définition 2.5 Continuité en un point. La fonction $f(x_1, x_2)$ est dite *continue* au point $M_0(x_{10}, x_{20})$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1) au point M_0 la fonction $f(x_1, x_2)$ possède une valeur déterminée L,

2) au point M_0 cette fonction a une limite qui est aussi égale à L.

Quand l'une au moins de ces conditions n'est pas vérifiée, la fonction est dite *discontinue* au point M_0. Il en est de même pour le cas de trois ou d'un plus grand nombre de variables.

Définition 2.6 Continuité sur un intervalle. La fonction $f(x_1, x_2)$ est dite *continue sur un intervalle* si elle est continue en tout point de cet intervalle.

Exemple 2.6 *La fonction f est définie par $f(0, 0) = 0$ et $f(x_1, x_2) = (2x_1^2 - x_2^2)/\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ pour $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$. Donner son domaine de définition et sur quel intervalle elle est continue.*

II.5 Dérivées partielles

Définition 2.7 Dérivée partielle. Soit f une fonction de n variables x_1, x_2, …, x_n, si toutes les variables x_i sont fixées à la valeur x_{i0} sauf la variable x_1, on obtient une fonction g de la seule variable x_1 dont on peut étudier la dérivabilité au point x_{10} ; si c'est le cas on note :

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x_1 = x_{10}} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{10}) = g'(x_{10}) &= \lim_{x_1 \to x_{10}} \frac{f(x_1, x_{20}, x_{30}, \dots, x_{n0}) - f(x_{10}, x_{20}, x_{30}, \dots, x_{n0})}{x_1 - x_{10}} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_{10} + h, x_{20}, x_{30}, \dots, x_{n0}) - f(x_{10}, x_{20}, x_{30}, \dots, x_{n0})}{h} \end{aligned} . \quad (2.2)$$

On applique le même raisonnement pour les autres variables :

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_i = x_{i0}} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{i0}) \text{ avec } i = 1, 2, \dots, n . \quad (2.3)$$

Définition 2.8 Dérivée partielle seconde. Lorsque la fonction f admet une dérivée $\partial f/\partial x_i|_{x_i = x_{i0}}$ en tout point de x_{i0} de $D_f \subset R^n$, on définit une nouvelle fonction de n variables $\partial f/\partial x_i$ dont on peut examiner les dérivées partielles notées

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \quad (2.4)$$

on a alors une dérivée partielle d'ordre 2. On peut ainsi calculer des dérivées successives, appelées dérivées partielles; l'ordre p de la dérivée est le nombre de dérivations successives effectuées.

Définition 2.9 Classe d'une fonction. Une fonction f définie sur $D_f \subset R^n$ est dite *de classe C^p* sur D_f si elle admet des dérivées partielles d'ordre p *continues*.

Théorème 2.1 Théorème de Schwarz. Si une fonction f définie sur $D_f \subset R^n$ est de classe C^2, alors l'ordre des dérivations n'intervient pas :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}. \tag{2.5}$$

Définition 2.10 Forme différentielle. Sous condition d'existence des dérivées partielles $\partial f/\partial x_i\big|_{x_i = x_{i0}}$ de la fonction f, on appelle *forme différentielle* de la fonction f la quantité

$$\delta f = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i. \tag{2.6}$$

δf représente les variations de f pour des petits déplacements des $\{dx_i\}$ (formule utilisée par exemple en physique pour le calcul d'erreur).

Exemple 2.7 *Soit $f(x, y) = x^3 - 3x^2 y - 2y^3$. Déterminer le domaine de définition de f. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 selon les variables x, y et vérifier le théorème de Schwarz. En déduire la différentielle totale.*

Exemple 2.8 *Aux bornes d'une résistance de valeur $R = 1 \pm 10\%$ $k\Omega$ la valeur du courant mesurée vaut $I = 1 \pm 0.05$ A. Quelle est alors l'incertitude ΔU sur la valeur de la tension U.*

Théorème 2.2 Théorème de dérivation des fonctions composées. Soient deux applications $f{:}D_f \subset R^n \to R$ et $\varphi{:}D_\varphi \subset R^m \to R^n$ (où D_f et D_φ sont ouverts) telles que $\varphi(D_\varphi) \subset D_f$. On écrit φ sous la forme $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ où $\varphi_i(u_1, \ldots, u_m){:}D_\varphi \to R$. Soit $a \in D_\varphi$ ($a = (a_1, \ldots, a_m)$) tel que φ soit différentiable en a et $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ est différentiable en $\varphi(a)$. Alors l'application $F = fo\varphi{:}D_\varphi \to R$ est différentielle en a et

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\}, \frac{\partial F}{\partial u_j}(a) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(a) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}[\varphi(a)]. \tag{2.7}$$

Dans le où φ_i ne dépend que d'une seul variable t alors

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t_0) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(t_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}[\varphi(t_0)]. \tag{2.8}$$

Par exemple si $F = f[x_1(u_1), x_2(u_1), x_3(u_1)]$ alors

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} = \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial u_3} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_3}. \tag{2.9}$$

Par exemple si $F = f[x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2)]$ alors

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u_1} = \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial F}{\partial u_2} = \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{cases} . \tag{2.10}$$

Exemple 2.9 *Soit $f:R^2 \to R$ une fonction de classe C^2 et $\varphi:R^* \times R \to R$ $(r, \theta) \to (r\cos\theta, r\sin\theta)$. L'application $F = f \bullet \varphi$ (qui est l'expression de F en coordonnées polaires) de classe C^2. Montrer alors que le laplacien de f vérifie*

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} . \tag{2.11}$$

II.6 Formule de Taylor

Soit f définie sur $D_f \subset R^n$ (où D_f est un espace ouvert de R^n) et de classe C^p, on note

$$\left[\sum_{i=1}^{i=n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{10}, \ldots, x_{n0})\right]^{[p]} = \sum_{i_1 + \ldots + i_n = p} \frac{p!}{i_1! \ldots i_n!} h_1^{i_1} \ldots h_n^{i_n} \frac{\partial^p f}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}(x_{10}, \ldots, x_{n0}) . \tag{2.12}$$

Théorème 2.3 Formule de Taylor-Lagrange. Soit f une fonction définie sur $D_f \subset R^n$ ouvert, à valeurs dans R de classe C^p. Si x_{i0} et $x_{i0} + h_i$ sont deux points tels que les segments $[x_{10} + h_1], \ldots, [x_{n0} + h_n]$ soient contenus dans D_f, alors

$$\begin{aligned} f(x_{10} + h_1, \ldots, x_{n0} + h_n) &= f(x_{10}, \ldots, x_{n0}) + \left[\sum_{i=1}^{i=n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{10}, \ldots, x_{n0})\right] + \frac{1}{2!}\left[\sum_{i=1}^{i=n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{10}, \ldots, x_{n0})\right]^{[2]} \\ &+ \ldots + \frac{1}{k!}\left[\sum_{i=1}^{i=n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{10}, \ldots, x_{n0})\right]^{[k]} + o([h_1^2 + \ldots + h_n^2]^{k/2}) \end{aligned} . \tag{2.13}$$

Exemple 2.10 *Ecrire un développement limité jusqu'à l'ordre 2, d'une fonction $f(x_{10} + h_1, x_{20} + h_2)$ à deux variables au voisinage de x_{10}, x_{20}.*

II.7 Extremum

Soit f une fonction définie de D_f ouvert de R^n dans R.

Définition 2.11 Extremum relatif. Si $f:D_f \subset R^n \to R$ admet un *extremum relatif* en un point a de D_f et si f est différentiable en a, alors $\delta f_a = 0$ (en d'autres termes, $\partial f / \partial x_i(a) = 0$ pour tout i).

A noter que la réciproque est fausse. Un point a pour lequel $\delta f_a = 0$ est appelé *point critique*. Ce résultat nous dit qu'un extremum relatif est nécessairement un point critique. Le problème devient alors : ayant un point critique, comment déterminer que celui-ci est un extremum? Pour cela écrivons la formule de Taylor à l'ordre 2 pour la fonction f supposée de classe C^2.

$$\begin{aligned} f(x_{10}+h_1, \dots, x_{n0}+h_n) - f(x_{10}, \dots, x_{n0}) &= \left[\sum_{i=1}^{i=n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{10}, \dots, x_{n0})\right] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} h_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_{10}, \dots, x_{n0}) \\ &+ \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j<i} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_{10}, \dots, x_{n0}) + o([h_1^2 + \dots + h_n^2]) \end{aligned} \quad . \quad (2.14)$$

Au point critique $a = (x_{10}, \dots, x_{n0})$ on a donc :

$$\begin{aligned} f(x_{10}+h_1, \dots, x_{n0}+h_n) - f(x_{10}, \dots, x_{n0}) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} h_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_{10}, \dots, x_{n0}) + \\ &\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j<i} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_{10}, \dots, x_{n0}) + o([h_1^2 + \dots + h_n^2]) \end{aligned} \quad . \quad (2.15)$$

Le signe de $f(x_{10}+h_1, \dots, x_{n0}+h_n) - f(x_{10}, \dots, x_{n0})$ est donc donné par le signe de :

$$\sum_{i=1}^{i=n} h_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_{10}, \dots, x_{n0}) + 2\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j<i} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_{10}, \dots, x_{n0}) , \quad (2.16)$$

si cette somme garde un signe constant pour $h_1^2 + \dots + h_n^2$ suffisamment petit. Soit la forme quadratique

$$Q(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^{i=n} h_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_{10}, \dots, x_{n0}) + 2\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j<i} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_{10}, \dots, x_{n0}) , \quad (2.17)$$

si celle-ci demeure :
- *positive*, la fonction f présentera un *minimum relatif* au point a,
- *négative*, la fonction f présentera un *maximum relatif* au point a.

Dans le cas où elle ne garde pas un signe constant nous ne pourrons pas conclure.
Pour une fonction à deux variables, une autre méthode consiste à utiliser le théorème suivant :

Théorème 2.4 Soit la fonction $f : D_f \subset R^2 \to R$ *de classe* C^2 *telle que* $\delta f_a = 0$ *pour* $a \in D_f$. *Posons*

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) , \; s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \;\; t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) , \quad (2.18)$$

alors,
- si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, f admet un minimum relatif en a ;

- si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, f admet un maximum relatif en a ;
- si $rt - s^2 < 0$ et $r > 0$, f n'admet pas un extremum en a ;
- si $rt - s^2 = 0$, on ne peut conclure.

Exemple 2.11 *Etudier les extrema relatifs de la fonction f définie par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1$.*

Pour une fonction à plusieurs variables, le théorème précédent peut être généralisé. On forme alors la matrice Hessienne de f définie par

$$H = [h_{ij}] \text{ avec } h_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \text{ pour } a \text{ point critique,} \tag{2.19}$$

et on détermine les valeurs propres; celles-ci sont réelles car la matrice H est réelle symétrique.
Si elles sont toutes *strictement positives*, on a un *minimum*;
Si elles sont toutes *strictement négative*s, on a un *maximum*;
Dans tous les autres cas (valeurs propres de signes différents, valeurs propres nulles) on ne peut conclure.

II.8 Intégrales curvilignes

L'espace est rapporté au repère orthonormé direct cartésien. Considérons une courbe orientée quelconque Γ et un arc $\overset{\frown}{AB} \in \Gamma$ que l'on divise en n petits éléments. Soit (x_i, y_i, z_i) les coordonnées cartésiennes d'un point M_i situé à l'intérieur du i-ème élément, dont la longueur est Δl_i. Considérons maintenant une fonction donnée $f(x, y, z)$ définie est continue sur $\overset{\frown}{AB}$, qui prend la valeur $f(x_i, y_i, z_i)$ au point M_i. A la fonction f, on associe la somme :

$$S_n = \sum_{i=1}^{i=n} f(M_i)\Delta l_i = \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i . \tag{2.20}$$

Définition 2.12 Intégrale curviligne d'une fonction scalaire. La limite, lorsqu'elle existe, de S_n quand n vers l'infini et que tous les Δl_i du partage de $\overset{\frown}{AB}$ tendent vers zéro est appelée *intégrale curviligne* de $f(x, y, z)$ sur $\overset{\frown}{AB}$; on la note :

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y, z)dl = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(M)dl(M) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i . \tag{2.21}$$

Définition 2.13 Intégrale curviligne d'une forme différentielle. On appelle *intégrale curviligne* le long de $\overset{\frown}{AB}$ de la *forme différentielle* $\delta f = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$, le réel I tel que :

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} \delta f = \int_{\overset{\frown}{AB}} [P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz] . \tag{2.22}$$

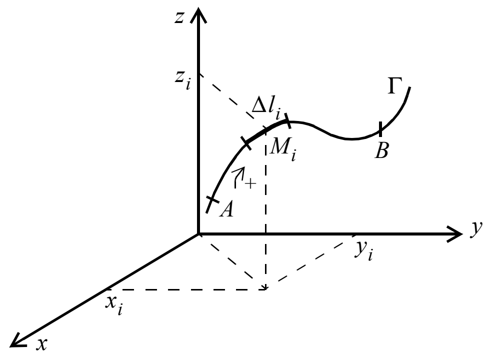


Figure II.1 *Définition d'une intégrale curviligne.*

Si la courbe Γ admet une représentation paramétrique $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, où le paramètre t est égal à t_A et t_B respectivement aux points A et B, l'intégrale curviligne précédente s'écrit :

$$I = \int_{t_A}^{t_B} [P_1(t)x'(t) + Q_1(t)y'(t) + R_1(t)z'(t)]dt \text{, avec } \begin{cases} P_1(t) = P[x(t), y(t), z(t)] \\ Q_1(t) = Q[x(t), y(t), z(t)] \\ R_1(t) = R[x(t), y(t), z(t)] \end{cases} \text{ et}$$

$$\begin{cases} x'(t) = dx/dt \\ y'(t) = dy/dt \\ z'(t) = dz/dt \end{cases} . \tag{2.23}$$

Les fonctions P, Q et R sont supposées de classe C^1 sur $\widehat{AB}$.

Propriétés : cas où la courbe Γ est ouverte

- Pour une forme différentielle donnée, la valeur de I dépend du chemin suivi pour aller de A à B. On note

$$I_{AB} = \int_{\widehat{AB}} \delta f = f_{AB} . \tag{2.24}$$

- Pour une forme différentielle donnée et un arc $\widehat{AB}$ donné, I est indépendante du paramètre choisi pour décrire Γ.

- Si $C \in \widehat{AB}$, on a

$$\int_{\widehat{AB}} \delta f = \int_{\widehat{AC}} \delta f + \int_{\widehat{CB}} \delta f . \tag{2.25}$$

$$\int_{\widehat{AB}} \delta f = -\int_{\widehat{BA}} \delta f . \tag{2.26}$$

Propriétés : cas où la courbe Γ est fermée

Lorsque l'intégrale curviligne se calcule sur un contour fermé, il est nécessaire de préciser le sens de parcours choisi car :

$$\oint_{\Gamma^+} \delta f = -\oint_{\Gamma^-} \delta f. \tag{2.27}$$

Si aucune précision n'est donnée, le sens de parcours est défini dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Intégrale curviligne d'une différentielle totale exacte

Une forme différentielle est dite *exacte* si les fonctions P, Q et R vérifient les équations suivantes :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{2.28}$$

On écrit alors :

$$Pdx + Qdy + Rdz = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz. \tag{2.29}$$

Dans le cas où la courbe est *ouverte*, il vient :

$$\int_{\widehat{AB}} df = f(B) - f(A). \tag{2.30}$$

L'intégrale curviligne d'une différentielle totale exacte est indépendante du chemin suivi pour aller de A à B. Elle ne dépend que du point de «départ» A et du point «d'arrivée» B. Cette propriété est fondamentale en physique pour les fonctions potentiels scalaires.

Dans le cas où la courbe est *fermée*, on a immédiatement :

$$\oint_{\Gamma} df = 0. \tag{2.31}$$

Théorème 2.5 Théorème de Green-Riemann. Soit D un domaine limité par le contour Γ et soit $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ une forme différentielle de degré 1, de classe C^1 sur D, alors

$$\int_{\Gamma} [P(x, y)dx + Q(x, y)dy] = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\right] dxdy. \tag{2.32}$$

Calcul d'une intégrale curviligne

D'une manière générale la calcul d'une intégrale curviligne d'une forme *différentielle* s'effectue :
- en paramétrant la courbe Γ ; on est ainsi ramené au calcul d'une intégrale simple;

- si la courbe Γ est *plane* et d'équation $y = f(x)$, en utilisant le paramétrage habituel $x = x$ et $y = f(x)$ nous avons alors

$$I = \int_{x_A}^{x_B} \{P[x, f(x)] + Q[x, f(x)]f'(x)\}dx\,. \tag{2.33}$$

Dans le cas d'une différentielle totale, on peut envisager le calcul :
- soit en utilisant la méthode habituelle du paramétrage;
- soit en remontant à l'ensemble des fonctions f dont la différentielle est df et en déterminant I par :

$$I = f(B) - f(A)\,. \tag{2.34}$$

Exemple 2.12 *Calculer l'intégrale curviligne I : a) le long du segment $[AB]$, orienté de A vers B et tel que $A(1;0)$, $B(0;1)$; b) le long d'un arc de cercle, orienté de A vers B en effectuant deux paramétrages différents; c) conclure. I est définie par :*

$$I = \int_{\widehat{AB}} y^2 dx - x^2 dy\,. \tag{2.35}$$

Exemple 2.13 *Répondre aux mêmes questions avec :*

$$I = \int_{\widehat{AB}} 2xydx + (x^2 + 3y^2)dy\,. \tag{2.36}$$

II.9 Intégrales double et triple

II.9.1 Intégrale double d'une fonction à deux variables

L'espace est rapporté au repère *plan* cartésien (Ox, Oy) dans lequel on considère un domaine D limité par une courbe fermée Γ. Décomposons D en n domaines élémentaires ΔD_i d'aire ΔA_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) et soit $M_i(x_i, y_i)$ un point *quelconque* de ΔD_i. Soit une fonction donnée $f(x, y)$ définie et continue sur D. Au point $M_i \in \Delta D_i$ elle prend la valeur $f(x_i, y_i)$. Considérons la somme

$$S_n = \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)\Delta A_i\,. \tag{2.37}$$

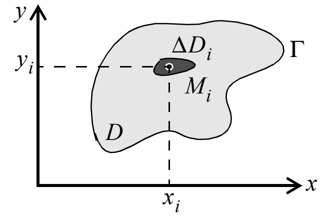


Figure II.2 *Définition d'une intégrale double.*

Définition 2.14 Intégrale double. La limite lorsqu'elle existe, de S_n quand $n \to \infty$ et que tous les ΔD_i tendent vers zéro est appelée intégrale double ordinaire de $f(x, y)$ sur le domaine D ; elle s'écrit :

$$I_2 = \iint_D f(x, y) dA = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \Delta A_i . \tag{2.38}$$

Autre représentation

Soit Σ la surface représentative de la fonction $z = f(x, y)$. La somme

$$S_n = \sum_{i=1}^{i=n} z_i \Delta A_i \tag{2.39}$$

représente une valeur approchée du volume V compris entre le plan (Ox, Oy), la surface Σ et les droites parallèles à l'axe (Oz) s'appuyant sur le contour Γ de D. Lorsque $n \to \infty$, la limite correspond *exactement* au volume V ; ainsi

$$\iint_D z(x, y) dA = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{i=n} z_i \Delta A_i = V . \tag{2.40}$$

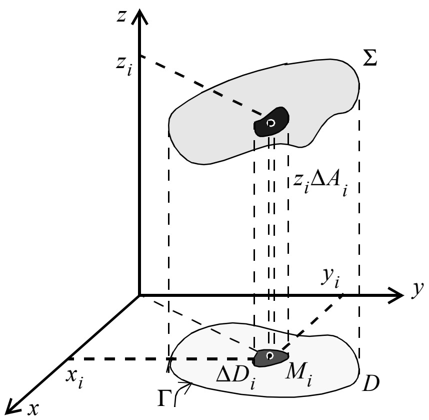


Figure II.3 *Intégrale double représentée comme un volume.*

Propriétés

Si D et D' sont deux domaines n'ayant aucun point commun (disjoints) :

$$\iint_{D+D'} f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dA + \iint_{D'} f(x, y) dA . \tag{2.41}$$

Si f est une fonction *continue* de *signe constant* et si

$$\iint_D f(x, y) dA = 0 , \tag{2.42}$$

alors $f = 0$ en tout point de D.

II.9.2 Calcul des intégrales doubles

<u>En coordonnées cartésiennes</u>

Théorème 2.6 Illustration du théorème de Fubini. On peut calculer l'intégrale double en considérant les domaines ΔD_i comme des rectangles obtenus en construisant une grille de droites parallèles aux axes (Ox) et (Oy) ; on écrit alors :

$$I_2 = \iint_D f(x, y)dxdy . \tag{2.43}$$

Il faut ensuite prendre en compte l'ensemble des ΔD_i par un mécanisme logique de «balayage». Si d'une part $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont les coordonnées des points d'intersection de la droite d'équation $x = x_i \in [a_1;a_2]$ avec Γ et si d'autre part $x_1(y)$ et $x_2(y)$ sont les abscisses des points d'intersection de la droite d'équation $y = y_i \in [b_1;b_2]$ avec Γ, l'intégrale double peut se transformer en deux intégrales successives par les deux types de balayage suivants :

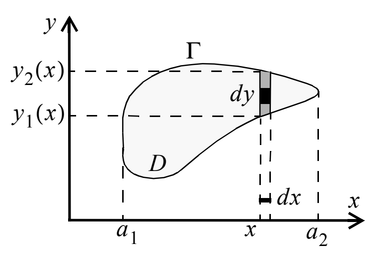
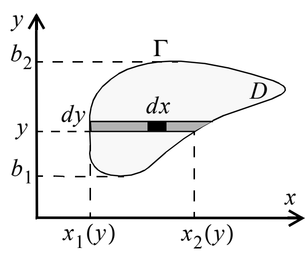
Cas 1	Cas 2
	
$I_2 = \iint_D f(x, y)dxdy$ $= \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy$	$I_2 = \iint_D f(x, y)dxdy$ $= \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx$

Tableau II.1 *Illustration du théorème de Fubini.*

Dans le cas 1, on effectue successivement :

- un balayage parallèlement à (Oy) (c.a.d. que x est fixé) et on intègre $f(x, y)$ par rapport à y de $y_1(x)$ à $y_2(x)$; le résultat est une fonction de x.

- puis un balayage parallèlement à (Ox) qui correspond à l'intégration de la fonction précédente de a_1 à a_2.

Dans le cas 2, on réalise :

- d'abord un balayage parallèle à (Ox) (y est fixe) et on intègre $f(x, y)$ de $x_1(y)$ à $x_2(y)$; le résultat est une fonction de y.

- puis une intégration de la fonction précédente de b_1 à b_2.

Autres repères : théorème du changement de variable

Ce théorème peut s'appliquer également à une fonction à plusieurs variables.

Théorème 2.7 Théorème du changement de variables. Par le changement de variables $x = x(u, v)$ et $y = (u, v)$, on fait correspondre au domaine D du plan des (x, y) le domaine D_{uv} du plan des (u, v) ; J étant le jacobien de la transformation, on a alors :

$$I_2 = \iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D_{uv}} f[x(u, v), y(u, v)]|J|dudv, \tag{2.44}$$

avec

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = det\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}\right) = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}. \tag{2.45}$$

Exemple 2.14 *Calculer I_2 où D est le domaine intérieur au rectangle $ABCD$ tel que $A(1;1)$, $B(3;1)$, $C(3;4)$ et $D(1;4)$.*

$$I_2 = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy$$

Exemple 2.15 *Calculer I_2 lorsque D est défini par $x^2/a^2 + 4y^2/a^2 \leq 1$ avec $x > 0$ et $y > 0$.*

$$I_2 = \iint_D 2(x - y)dxdy$$

Exemple 2.16 *Calculer I_2 lorsque D est défini par le plan (Ox, Oy) avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$. En déduire la valeur de $\int_0^\infty \exp(-x^2)dx$.*

$$I_2 = \iint_D \exp[-a(x^2 + y^2)]dxdy \text{ avec } a = cste > 0$$

II.9.3 Intégrale triple d'une fonction à trois variables

Définition 2.15 Intégrale triple. Dans l'espace cartésien (Ox, Oy, Oz) considérons un volume V, limité par une surface S, dont la projection sur le plan (Ox, Oy) détermine un domaine D_z limité par une courbe fermé Γ. Décomposons V en n pavés partiels de volume ΔV_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) et soit $M_i(x_i, y_i, z_i)$ un point *quelconque* de ΔV_i. Soit maintenant une fonction $f(x, y, z)$ continue sur V. A chaque point M_i on associe la fonction $f(x_i, y_i, z_i)$. La limite, lorsqu'elle existe, de la somme

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i \tag{2.46}$$

quand $n \to \infty$ et que tous les ΔV_i tendent vers zéro est appelée intégrale triple de $f(x, y, z)$ étendue au volume V ; elle s'écrit :

$$\iiint_V z(x, y, z)dV = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i . \tag{2.47}$$

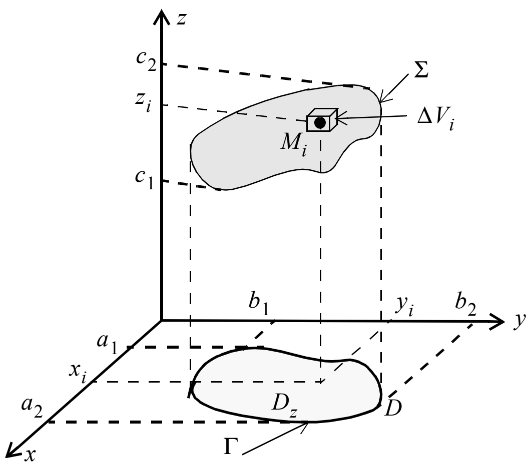


Figure II.4 *Définition d'une intégrale triple*

II.9.4 Calcul des intégrales triples

En coordonnées cartésiennes

On peut calculer l'intégrale triple en considérant des pavés comme des parallépipèdes rectangles obtenus en quadrillant l'espace de plans parallèles aux plans (Ox, Oy), (Oy, Oz) et (Oz, Ox) ; on écrit alors

$$I_3 = \iiint_D f(x, y, z)dxdydz . \tag{2.48}$$

Pour tenir compte de l'ensemble des ΔV_i, il faut entreprendre un triple mécanisme de balayage.

Théorème 2.8 Illustration du théorème de Fubini. Si d'une part $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont les coordonnées des points d'intersection de la droite s'équation $x = x_i \in [a_1;a_2]$ avec Γ, si d'autre part $x_1(y)$ et $x_2(y)$ sont les abscisses des points d'intersection de la droite d'équation $y = y_i \in [b_1;b_2]$ avec Γ et si enfin $z_1(x, y)$ et $z_2(x, y)$ sont les cotes des points d'intersection de la droite d'équation $z = z_i \in [c_1;c_2]$ avec Σ, l'intégrale triple s'écrit

$$I_3 = \int_{a_1}^{a_2} dx \left\{ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right] \right\}. \tag{2.49}$$

L'intégrale située entre crochets doit être déterminée en *premier*.

Autres repères : théorème du changement de variable

Théorème 2.9 Théorème du changement de variables. Par le changement de variables $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$ et $z = z(u, v, w)$, on fait correspondre au domaine V de l'espace des (x, y, z) le domaine V_{uvw} de l'espace des (u, v, w) ; J étant le jacobien de la transformation qui à x, y, z fait correspondre les variables u, v, w, on a alors :

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V_{uvw}} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] |J| du dv, \tag{2.50}$$

avec

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = det\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} \right). \tag{2.51}$$

Exemple 2.17 *Si V est le volume d'un huitième de boule défini par $x^2 + y^2 + z^2 \le R$ avec $x \ge 0$, $y \ge 0$ et $z \ge 0$, calculer l'intégrale triple*

$$I_3 = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \text{, en coordonnées sphériques}$$

II.10 Equation aux dérivées partielles

Dans cette partie on ne donnera que des notions générales sur les équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre et à deux variables; on envisagera que les méthodes de résolution les plus courantes.

II.10.1 Généralités

Définition 2.16 Soit $u(x, y)$ une fonction de deux variables définie dans R^2 et de classe C^2. Une équation aux dérivées partielles, linéaire, du second ordre, à deux variables est de la forme :

$$A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2E(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + 2F(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + G(x, y)u = H(x, y). \tag{2.52}$$

Si les facteurs A, B, …, G sont *constants*, l'équation est dite à *coefficients constants*. Si $H(x, y) = 0$, l'équation est dite *homogène* ou sans second membre.

Dans le cas particulier où l'équation est à coefficients constants, un changement de variables permet de simplifier l'équation initiale. On pose alors

$$X = \alpha x + \beta y \text{ et } Y = \rho x + \sigma y, \tag{2.53}$$

où α, β, ρ et σ sont des paramétres tels que : $\alpha\sigma - \beta\rho \neq 0$. Les différentes dérivées de la fonction u par rapport aux nouvelles variables X et Y conduisent, selon le cas, à une équation plus simple de la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \pm \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + 2e\frac{\partial u}{\partial X} + 2f\frac{\partial u}{\partial Y} + gu = h(X, Y). \tag{2.54}$$

Dans les problèmes rencontrés en physique, les variables x et y représentent le plus souvent le *temps* et la *position*. De plus les données expérimentales imposent des conditions sur le temps (généralement à $t = 0$) et des conditions en des points particuliers des l'espace : ce sont respectivement les *conditions initiales* et les *conditions aux limites* du phénomène décrit par l'équation (2.52).

On appelle *solution élémentaire* toute fonction qui vérifie l'équation aux dérivées partielles. Si elle vérifie en plus les conditions initiales et aux limites, cette fonction constitue une *solution* de l'équation différentielle.

A noter que la solution générale d'une équation différentielle du second ordre ne dépend que de deux *constantes arbitraires* (paragraphe I.6.2), celle d'une équation aux dérivées partielles d'ordre deux dépend de deux *fonctions arbitraires*. Les conditions initiales et aux limites permettent de fixer la *structure analytique* de ces fonctions arbitraires.

II.10.2 Résolution de l'équation de propagation des ondes

Dans cette partie l'équation de propagation des ondes donnée par

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{2.55}$$

est résolue par la méthode (2.53), où u est une fonction des variables spatiale x et temporelle t et v une constante homogène à une vitesse. Nous utilisons alors le changement de variables suivant :

$$X = x + \alpha t \text{ et } Y = x + \beta t\text{, avec } \beta - \alpha \neq 0 \text{ soit } \beta \neq \alpha. \tag{2.56}$$

D'après la relation (2.10) pour $u = u(X(x, t), Y(x, t))$ on a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial X}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial X} + \dfrac{\partial Y}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial Y} = \dfrac{\partial u}{\partial X} + \dfrac{\partial u}{\partial Y} = u_x \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial X}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial X} + \dfrac{\partial Y}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial Y} = \alpha\dfrac{\partial u}{\partial X} + \beta\dfrac{\partial u}{\partial Y} = u_t \end{cases}, \tag{2.57}$$

et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial u_x}{\partial x} = \dfrac{\partial X}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial u_x}{\partial X}+\dfrac{\partial Y}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial u_x}{\partial Y} = \dfrac{\partial u_x}{\partial X}+\dfrac{\partial u_x}{\partial Y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial X^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial Y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial Y\partial X} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) = \dfrac{\partial u_t}{\partial t} = \dfrac{\partial X}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial u_t}{\partial X}+\dfrac{\partial Y}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial u_t}{\partial Y} = \alpha\dfrac{\partial u_t}{\partial X}+\beta\dfrac{\partial u_t}{\partial Y} = \alpha^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial X^2}+\beta^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial Y^2}+\alpha\beta\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial Y\partial X}\right) \end{cases}. \tag{2.58}$$

La fonction u est supposée de classe C^2 qui implique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Y\partial X} = \frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y}. \tag{2.59}$$

En substituant (2.59) et (2.58) dans (2.55), nous obtenons l'équation réduite suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}\left(1-\frac{\alpha^2}{v^2}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\left(1-\frac{\beta^2}{v^2}\right)+2\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y}\left(1-\frac{\alpha\beta}{v^2}\right) = 0 . \tag{2.60}$$

Afin de simplifier cette équation, le couple $\{\alpha, \beta\}$ est choisi de telle manière à supprimer les termes $\partial^2 u/\partial X^2$ et $\partial^2 u/\partial Y^2$. On a donc

$$\begin{cases} \alpha^2 = v^2 \\ \beta^2 = v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm v \\ \beta^2 = \pm v \end{cases} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y}\left(1-\frac{\alpha\beta}{v^2}\right) = 0 . \tag{2.61}$$

De plus, d'après (2.56), $\beta \neq \alpha$ donc $\beta = -\alpha = -v$ et (2.61) devient alors

$$\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial u}{\partial X}\right) = 0 \text{ avec } \begin{cases} X = x+vt \\ Y = x-vt \end{cases}. \tag{2.62}$$

Ainsi $f = \partial u/\partial X$ est une fonction *seule* de X puisque $\partial f/\partial Y = 0$. On a donc

$$\frac{\partial u}{\partial X} = f(X) \Rightarrow u(X, Y) = \int f(X)dX + C = f_1(X) + cste , \tag{2.63}$$

où la constante résultant de l'intégration d'une dérivée partielle est une fonction de $f_2(Y)$. On peut écrire

$$u(X, Y) = f_1(X)+f_2(Y) \text{ ou } u(x, t) = f_1(x+vt)+f_2(x-vt) . \tag{2.64}$$

Maintenant si on impose les *conditions initiales* suivantes

$$u(x, 0) = \varphi_1(x) \text{ et } \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_2(x) \text{ avec } \int\varphi_2(x)dx = \psi_2(x) , \tag{2.65}$$

où φ_1 et φ_2 sont des fonctions connues de x, alors

$$f_1(x)+f_2(x) = \varphi_1(x) \text{ et } v[f_1'(x)-f_2'(x)] = \varphi_2(x) \Rightarrow v[f_1(x)-f_2(x)] = \psi_2(x) . \tag{2.66}$$

L'équation (2.64) devient alors

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left[\varphi_1(x+vt) + \frac{1}{v}\psi_2(x+vt)\right] + \frac{1}{2}\left[\varphi_1(x-vt) - \frac{1}{v}\psi_2(x-vt)\right]. \qquad (2.67)$$

Les conditions initiales ont permis de fixer la *structure analytique* de f_1 et f_2 grâce aux fonctions connues φ_1 et φ_2. Le premier terme de l'équation correspond à la propagation de l'onde réfléchie et le second terme donne la propagation de l'onde transmise.

II.10.3Résolution de l'équation de la diffusion : méthode de la séparation des variables

Les phonèmes de transport sont décrits par l'équation de diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad (2.68)$$

où x et t désigne respectivement les variables spatiale et temporelle et $u(x, t)$ une fonction finie à chaque instant t pour toute valeur de x. On suppose que la solution est de la forme $u(x, t) = P(x) \cdot Q(t)$.
On a donc

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(x)\frac{dQ}{dt} = P(x)Q'(t) \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = Q(t)\frac{d^2 P}{dx^2} = Q(t)P''(x). \qquad (2.69)$$

D'où

$$\frac{1}{a^2}\frac{Q'(t)}{Q(t)} = \frac{P''(x)}{P(x)} \text{ si } \begin{cases} Q(t) \neq 0 \\ P(x) \neq 0 \end{cases}. \qquad (2.70)$$

Le premier membre de l'équation, fonction de t seulement, et le second membre, fonction de x seulement, ne peuvent être égaux que s'ils sont *constants* :

$$\frac{1}{a^2}\frac{Q'(t)}{Q(t)} = \frac{P''(x)}{P(x)} = \lambda, \qquad (2.71)$$

où λ est une constante positive, négative ou nulle. Ainsi

$$Q'(t) - \lambda a^2 Q(t) = 0 \text{ et } P''(x) - \lambda P(x) = 0. \qquad (2.72)$$

La résolution de la première équation différentielle donne

$$Q(t) = C\exp(\lambda a^2 t) \text{ où } C \text{ est une constante arbitraire.} \qquad (2.73)$$

De plus, puisque $Q(t)$ est une grandeur finie, nous devons avoir $\lambda = -k^2 \leq 0$, donc

$$Q(t) = C\exp(-k^2 a^2 t) \text{ et } P''(x) + k^2 P(x) = 0. \qquad (2.74)$$

D'après le paragraphe I.6.2, nous obtenons

$$P(x) = A_1 \cos(kx) + A_2 \sin(kx) . \tag{2.75}$$

Finalement on obtient la solution

$$u(x, t) = C\exp(-k^2 a^2 t)[A_1 \cos(kx) + A_2 \sin(kx)] . \tag{2.76}$$

Les constantes C, A_1 et A_2 sont obtenues à partir des conditions initiales et aux limites.

CHAPITRE III

Champs scalaire et vectoriel - Opérateurs différentiels

III.1 Champs scalaire et vectoriel

Définition 3.1 Champ scalaire. Si à tout point de l'espace, on peut associer une grandeur locale scalaire $f(x, y, z)$, on définit une fonction de point à valeur *scalaire* $f(M) = f(x, y, z)$. L'ensemble des valeurs prises par $f(M)$ en tout point de l'espace constitue un *champ scalaire* (ex. : potentiel électrique $V(M)$, pression $p(M)$).

Ce champ scalaire peut être également fonction d'autres variables et en particulier du temps t (noté alors $f(M, t)$).

Définition 3.2 Surface de niveau. On appelle *surface de niveau* ou *surface isoscalaire* toute surface sur laquelle $f(M) = cste$ (ex. : surface équipotentielle $V(M) = cste$, surface isobarique $p(M) = cste$).

Dans un plan, les points tels que $f(M) = cste$ déterminent une courbe de niveau.

Définition 3.3 Champ vectoriel. Si à tout point de l'espace, on peut associer une grandeur locale vectorielle $\vec{F}(x, y, z)$, on définit une fonction de point à valeur *vectorielle* $\vec{F}(M) = \vec{F}(x, y, z)$. L'ensemble des valeurs prises par $\vec{F}(M)$ en tout point de l'espace constitue un *champ vectoriel* (ex. : champ électrostatique $\vec{E}(M)$, champ de pesanteur $\vec{g}(M)$).

Ce champ vectoriel peut être également fonction d'autres variables et en particulier du temps t (noté alors $\vec{F}(M, t)$).

Définition 3.4 Ligne de champ. Une *ligne de champ*, associée au champ vectoriel $\vec{F}(M)$, est une courbe tangente en chaque point M au vecteur $\vec{F}(M)$; en physique elle est orientée dans le sens du champ.

Si $\vec{dl}(M)$ est le vecteur déplacement élémentaire tangent en M à la ligne de champ, on a :

$$\vec{F}(M) \wedge \vec{dl}(M) = \vec{0}\,. \tag{3.1}$$

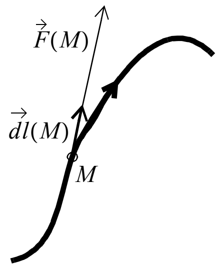


Figure III.1 *Définition d'une ligne de champ.*

III.2 Circulation d'un champ vectoriel

Définition 3.5 Circulation d'un champ vectoriel. On appelle circulation du champ du vecteur $\vec{F}(M)$ le long de la courbe Γ entre les points A et B, le *scalaire* Γ_{AB} tel que :

$$\Gamma_{AB} = \int_{\widehat{AB}} \vec{F}(M_c) \cdot \vec{dl}(M_c)\,, \tag{3.2}$$

où M_c est un point appartenant à Γ et $\vec{dl}(M_c)$ le vecteur déplacement élémentaire *tangent* au point M_c.

Soit un champ vectoriel $\vec{F}(M)$ et une courbe *orientée* Γ *quelconque*. Dans un repère orthonormé direct cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, si on définit le point $M_c(x, y, z)$ alors

$$\vec{F}(M_c) = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z\,,\ \vec{dl}(M_c) = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z \text{ et} \tag{3.3}$$

$$\Gamma_{AB} = \int_{\widehat{AB}} F_x dx + F_y dy + F_z dz\,; \tag{3.4}$$

la circulation Γ_{AB} est donc une *intégrale curviligne* (paragraphe II.8). Les propriétés propres à la circulation sont celles de l'intégrale curviligne.

En général la circulation dépend du chemin suivi pour aller de A à B. Dans ce cas la circulation élémentaire est une forme différentielle qui s'écrira $\vec{F} \cdot \vec{dl} = \delta C$; ainsi :

$$C_{AB} = \int_{\widehat{AB}} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_{\widehat{AB}} \delta C = C_{AB}\,. \tag{3.5}$$

Par exemple, en mécanique, la circulation du *vecteur force* $\vec{F}$, appelée *travail*, a pour expression :

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_{\widehat{AB}} \delta W = W_{AB} \,. \tag{3.6}$$

Pour un contour fermé, on a le plus souvent :

$$\oint_C \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} \neq 0 \,. \tag{3.7}$$

Lorsque la circulation *ne dépend pas du chemin suivi* pour aller de A à B, la circulation élémentaire est une différentielle totale exacte. Dans ce cas :

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_{\widehat{AB}} df = f(B) - f(A) \,. \tag{3.8}$$

$f(A)$ et $f(B)$ sont les valeurs aux points A et B d'une fonction $f(M)$ (définie à une constante près) appelée *fonction potentiel*. En coordonnées cartésiennes, on aura successivement :

$$\left.\begin{aligned} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} &= F_x dx + F_y dy + F_z dz \\ df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial x} dy \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} F_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ F_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} \,. \\ F_z = \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{cases} \tag{3.9}$$

On préfère en physique définir la grandeur *potentiel scalaire* $U(M)$ qui est de signe opposé à celui de la fonction potentiel.

Comme la circulation n'est fonction que des coordonnées spatiales de A et B, la circulation le long d'un *contour fermé quelconque* est évidemment nulle; on dit alors que la *circulation est conservative*.

Exemple 3.1 *Considérons dans le repère orthonormé direct cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, un champ vectoriel uniforme $\vec{F} = F\vec{e}_x$ avec $F > 0$. Calculer la circulation du vecteur $\vec{F}$ entre les points d'abscisses respectives x_A et x_B. Application : soit $m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$ le poids d'un point matériel M dans une région de l'espace où le vecteur champ de pesanteur est supposé uniforme. Calculer la circulation du vecteur $m\vec{g}$ entre un point A de cote z_A et un point B de cote z_B. En déduire la fonction potentiel scalaire associée.*

III.3 Flux d'un champ vectoriel

Soit une surface *ouverte* S dont l'unique «ouverture» est délimitée par un contour fermé Γ (on dit que S s'appuie sur Γ). Orienter la surface S consiste à définir en tout point $M_s \in S$ un vecteur unitaire $\vec{e}_n$ orthogonal à S dont l'orientation est *préalablement déterminée* (considération physique). Si autour du point M_s, on peut définir le vecteur surface élémentaire $\overrightarrow{dS}$ orienté suivant $\vec{e}_n$ alors :

$$\overrightarrow{dS}(M_s) = \vec{e}_n \cdot \overrightarrow{dS} \text{ avec } dS > 0\,. \qquad (3.10)$$

Définition 3.6 Flux d'une surface ouverte. Soit un champ vectoriel $\vec{F}(M)$ est une surface *ouverte orientée* S. On appelle flux de $\vec{F}(M)$ à travers S le scalaire Φ représenté par l'*intégrale de surface* :

$$\Phi = \iint_S \vec{F}(M_s) \cdot \overrightarrow{dS}(M_s) \text{ où } M_s \in S\,. \qquad (3.11)$$

Définition 3.7 Flux d'une surface fermée. Soit une surface S *fermée* et un point $M_s \in S$. Les vecteurs $\vec{e}_n$ et $\overrightarrow{dS}$ sont dans ce cas orientés par *convention* de l'intérieur vers l'extérieur. Le flux de $\vec{F}(M)$ à travers une surface fermée s'écrira

$$\Phi = \oint_S \vec{F}(M_s) \cdot \overrightarrow{dS}(M_s)\ . \qquad (3.12)$$

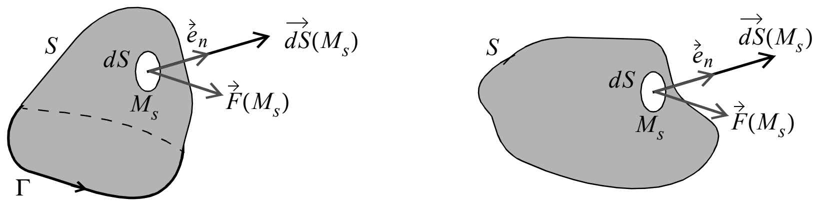


Figure III.2 *Définition du flux d'une surface ouverte et fermée.*

Si le flux de $\vec{F}(M)$ à travers une surface fermée quelconque S est nul, on dit que le champ vectoriel est à *flux conservatif*.

Exemple 3.2 *L'espace étant rapporté au repère cartésien* (Ox, Oy, Oz)*, on considère un cylindre droit de bases circulaires, symétrique par rapport au plan* (Ox, Oy)*. Si* P *est un point quelconque de la surface cylindrique, calculer le flux du champ vectoriel* $\vec{F}(P) = k\overrightarrow{OP}/OP^3$ *(*k *étant une constante) à travers la surface fermée* S *constituée par la surface latérale* S' *et les surfaces des bases inférieures* S_m'' *et* S_p''.

III.4 Gradient et potentiel scalaire

Définition 3.8 Gradient. Soit f une fonction *scalaire* définie sur un domaine $D_f \subset R^n$, de classe C^1, on appelle gradient de f au point $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D_f$ le *vecteur* de R^n de composantes : $\partial f/\partial x_i(x)$ avec $i = 1, \ldots, n$. Il est noté

$$\vec{F}(x) = \overrightarrow{grad}(f) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\vec{e}_i\,, \qquad (3.13)$$

où $\vec{e}_i$ sont les vecteurs unitaires définissant l'espace euclidien. En physique, les champs scalaire et vectoriel rencontrés dépendent en général des coordonnées spatiales (x, y, z). Le gradient s'écrit alors :

$$\overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_y . \tag{3.14}$$

L'opérateur gradient transforme un champ *scalaire* $f(M)$ en un champ *vectoriel* $\overrightarrow{grad}[f(M)]$. Le vecteur $\overrightarrow{grad}(f)$ est perpendiculaire aux surfaces de niveau et orienté dans le sens des f croissants.

On peut exprimer également le gradient à l'aide de l'opérateur vectoriel nabla $\vec{\nabla}$ défini uniquement en coordonnées cartésiennes; ce qui conduit à

$$\overrightarrow{grad}(f) = \vec{\nabla} f \text{ où } \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_y . \tag{3.15}$$

Pour un petit déplacement élémentaire $\vec{dl} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$ on a :

$$\overrightarrow{grad}(f) \cdot \vec{dl} = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \delta f . \tag{3.16}$$

La circulation de ce champ vectoriel le long de la courbe Γ entre les points A et B est donc

$$\int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{grad}(f) \cdot \vec{dl} = \int_{\widehat{AB}} \delta f . \tag{3.17}$$

Si de plus f est une différentielle totale *exacte* (paragraphe II.8) alors $\delta f = df$ et la circulation du vecteur $\overrightarrow{grad}(f)$ est indépendante du chemin suivi; on peut donc lui associer une fonction potentielle.

Application

Si la circulation d'un champ vectoriel le long d'un contour fermé est *conservative*, on a :

$$\oint \vec{F} \cdot \vec{dl} = 0 \text{ et } \vec{F} \cdot \vec{dl} = -dU . \tag{3.18}$$

Comme par définition : $dU = \overrightarrow{grad}(U) \cdot \vec{dl}$, on en déduit que :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(U) . \tag{3.19}$$

On dit que $\vec{F}$ dérive d'un potentiel scalaire U. $\vec{F}$ est orienté vers les potentiels *décroissants*. C'est le cas, par exemple, du champ électrostatique $\vec{E}$ qui dérive du potentiel électrostatique V : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$.

L'opérateur gradient n'agit que sur les coordonnées *spatiales* de la fonction scalaire; si le champ scalaire est non stationnaire alors :

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\overrightarrow{grad}[f(M,t)]\} = \overrightarrow{grad}\left[\frac{\partial f(M,t)}{\partial t}\right]. \tag{3.20}$$

III.5 Rotationnel

Définition 3.9 Rotationnel. Soit $\vec{F}$ une fonction *vectorielle* définie sur un domaine $D_f \subset R^3$, de classe C^1, on appelle rotationnel de $\vec{F}$ au point $(x, y, z) \in D_f$ le *vecteur* $\overrightarrow{rot}\vec{F}$ de R^3 de composantes :

$$\overrightarrow{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z . \tag{3.21}$$

Le rotationnel peut être également donné à partir de l'opérateur nabla (uniquement en coordonnées cartésiennes)

$$\overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \left\|\begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}\right\| \text{ où } \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_y . \tag{3.22}$$

L'opérateur gradient transforme donc un champ *vectoriel* $\vec{F}(M)$ en un champ également *vectoriel* $\overrightarrow{rot}\vec{F}$.

La définition propre du rotationnel implique le théorème suivant :

Théorème 3.1 Un champ de vecteur défini dans R^3, de classe C^1, dérive d'un potentiel scalaire (à une constante près) s'il est de rotationnel nul.

Par conséquent si le rotationnel d'un champ vectoriel est *nul* alors le champ est à *circulation convervative*.

Exemple 3.3 *Démontrer à l'aide de deux méthodes que* $\overrightarrow{rot}[\overrightarrow{grad}(f)] = \vec{0}$ *avec f une fonction scalaire de classe* C^2 *sur* $D_f \subset R^3$.

Exemple 3.4 *Soit le champ de vecteur défini sur* R^3 *par* $\vec{F}(M) = 2xz\vec{e}_x + yz\vec{e}_y + (x^2 + y^2/2)\vec{e}_z$. *Montrer que* $\overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{0}$ *et en déduire la fonction scalaire f associée.*

L'opérateur rotationnel n'agit que sur les coordonnées *spatiales* d'une fonction vectorielle; si le champ vectoriel est non stationnaire, alors :

$$\frac{\partial}{\partial t}[\overrightarrow{rot}\vec{F}(M,t)] = \overrightarrow{rot}\left[\frac{\partial \vec{F}(M,t)}{\partial t}\right]. \tag{3.23}$$

Théorème 3.2 Théorème de Stokes : passage d'une intégrale *curviligne* à une intégrale *surfacique*. Soit Γ une courbe fermée orientée sur laquelle s'appuie la surface S. Soit un champ vectoriel $\vec{F}(M)$ définie et de classe C^1 dans le domaine spatial contenant S. De plus, si $M_\Gamma \in \Gamma$ et $M_s \in S$ alors

$$\oint_\Gamma \vec{F}(M_\Gamma) \cdot \vec{dl}(M_\Gamma) = \iint_S \overrightarrow{rot}\vec{F}(M_S) \cdot \vec{dS}(M_S) . \tag{3.24}$$

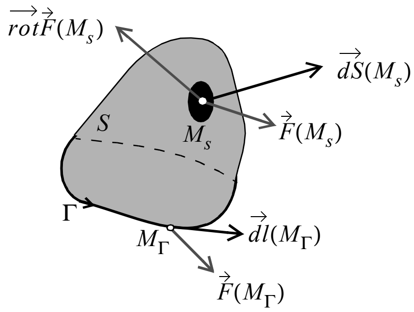


Figure III.3 *Enoncé du théorème de Stokes.*

En d'autre termes : la circulation du champ vectoriel $\vec{F}(M)$ le long d'un contour *fermé quelconque* Γ est égale au flux du champ vectoriel $\overrightarrow{rot}\vec{F}(M)$ à travers *toute surface ouverte* s'appuyant sur Γ. Le théorème de Stokes est une généralisation du théorème 2.5 de Green-Rieman.

Exemple 3.5 *A partir de la loi de Lentz* $e = -\partial\Phi/\partial t$ *où* Φ *est le flux du champ magnétique* $\vec{B}$, *montrer que* $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$.

III.6 Divergence

Définition 3.10 Divergence. Soit $\vec{F}$ une fonction *vectorielle* définie sur un domaine $D_f \subset R^n$ et de composantes $(F_1, \ldots, F_n)$, de classe C^1, on appelle divergence de $\vec{F}$, notée $div\vec{F}$, au point $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D_f$ le *scalaire* de R tel que :

$$div\vec{F}(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x) , \tag{3.25}$$

L'opérateur divergence transforme donc un champ *vectoriel* $\vec{F}(M)$ en *scalaire*. Pour une fonction à trois variables, la divergence s'écrit :

$$div\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} . \tag{3.26}$$

A l'aide de l'opérateur nabla, il peut également s'écrire :

$$div\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} \text{ avec } \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_y \text{ et } \vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_y\vec{e}_y\,. \quad (3.27)$$

Exemple 3.6 *Montre que* $div(\overrightarrow{rot}\vec{F}) = 0$ *par deux méthodes avec* $\vec{F}$ *une fonction vectorielle de classe* C^2.

Par conséquent si $div(\vec{F}) = 0$ alors $\vec{F} = \overrightarrow{rot}\vec{A}$; on dit que le vecteur $\vec{F}$ dérive d'un potentiel vecteur $\vec{A}$. En fait $\vec{A}$ est défini à un gradient près car si $\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{grad}(f)$, il vient :

$$\overrightarrow{rot}\vec{A}' = \overrightarrow{rot}[\vec{A} + \overrightarrow{grad}(f)] = \overrightarrow{rot}\vec{A} + \overrightarrow{rot}[\overrightarrow{grad}(f)] = \overrightarrow{rot}\vec{A}\,. \quad (3.28)$$

Un champ vectoriel de divergence nulle est un champ à *flux conservatif.*

Théorème 3.3 Théorème d'Ostrogradski. Passage d'une intégrale *surfacique* à une intégrale *volumique*. Soit S une surface qui délimite le volume V et un champ vectoriel $\vec{F}(M)$ défini et de classe C^1 dans le domaine V. De plus, si $M_s \in S$ et $M_v \in V$ alors

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{F}(M_s)\cdot\overrightarrow{dS}(M_s) = \iiint div[\vec{F}(M_v)]dV(M_v)\,. \quad (3.29)$$

En d'autre termes : le flux du champ vectoriel $\vec{F}(M)$ à travers une surface *fermée quelconque* S est égale à l'intégrale triple du champ scalaire $div\vec{F}(M)$ étendue au volume V délimité par S.

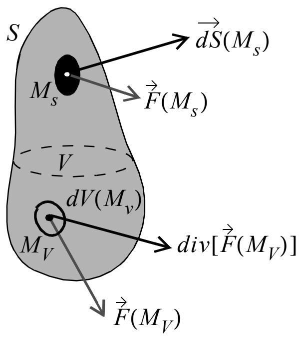


Figure III.4 *Enoncé du théorème d'Ostrogradski.*

Exemple 3.7 *Montrer à partir du théorème de Gauss que* $div\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ *où* ρ *est la densité volumique de charge et* ε_0 *la permittivité du vide.*

III.7 Laplacien

C'est un opérateur du second ordre, noté ∇^2, qui peut agir sur un champ scalaire ou vectoriel.

Définition 3.11 Laplacien scalaire. Le laplacien d'un champ *scalaire* $f(M)$ défini et de classe C^2 sur R^3 s'écrit :

$$\nabla^2 f(M) = div[\overrightarrow{grad} f(M)] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \tag{3.30}$$

Définition 3.12 Laplacien vectoriel. Le laplacien d'un champ vectoriel $\vec{F}(M)$ défini et de classe C^2 sur R^3 s'écrit :

$$\nabla^2 \vec{F}(M) = \overrightarrow{grad}[div \vec{F}(M)] - \overrightarrow{rot}[\overrightarrow{rot}\vec{F}(M)] = \nabla^2 F_x \vec{e}_x + \nabla^2 F_y \vec{e}_y + \nabla^2 F_z \vec{e}_z . \tag{3.31}$$

Exemple 3.8 *Démontrer la relation ci-dessous :*

$$\nabla^2 \vec{F}(M) = \left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2}\right)\vec{e}_z . \tag{3.32}$$

La notation ∇^2, pour désigner le laplacien, découle du formalisme utilisant l'opérateur $\vec{\nabla}$:

$$div[\overrightarrow{grad} f(M)] = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} f\right) = \nabla^2 f. \tag{3.33}$$

III.8 Opérateurs en coordonées cylindriques et sphèriques

En physique, pour des raisons de symétrie du système étudié, les coordonnées cylindriques ou sphériques sont souvent utilisées. Il est donc nécessaire de connaître l'expression des opérateurs vectoriels pour de tels systèmes.

III.8.1 Coefficients métriques

Soit (x, y, z) les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque M exprimées comme des fonctions de (q_1, q_2, q_3) par

$$x = x(q_1, q_2, q_3)\,,\; y = y(q_1, q_2, q_3) \text{ et } z = z(q_1, q_2, q_3)\,. \tag{3.34}$$

Supposons que l'équation ci-dessus puisse se résoudre en q_1, q_2, q_3 comme fonctions de x, y, z, c'est à dire

$$q_1 = q_1(x, y, z)\,,\; q_2 = q_2(x, y, z) \text{ et } q_3 = q_3(x, y, z)\,. \tag{3.35}$$

Les fonctions x, y, z, q_1, q_2 et q_3 sont supposées prendre une seule valeur en chaque point et posséder des dérivées continues, de sorte que la correspondance entre (x, y, z) et (q_1, q_2, q_3) soit unique. En pratique cette hypothèse peut ne pas se vérifier en certains points et un examen particulier est alors nécessaire. Etant donné un point M de coordonnées rectangulaires (x, y, z) nous pouvons lui associer un seul ensemble de coordonnées (q_1, q_2, q_3) appelées les coordonnées curvilignes de M. Les deux équations ci-dessous définissent un changement de coordonnées.

Les surfaces $q_1 = c_1$, $q_2 = c_2$, $q_3 = c_3$, où $\{c_i\}$ sont constants, s'appellent des surfaces de coordonnées et ces surfaces se coupent deux à deux suivant des courbes appelées courbes ou droite de coordonnées. Si les surfaces de coordonnées se coupent en formant des *angles droits*, le système de coordonnées curvilignes s'appelle *orthogonal*.

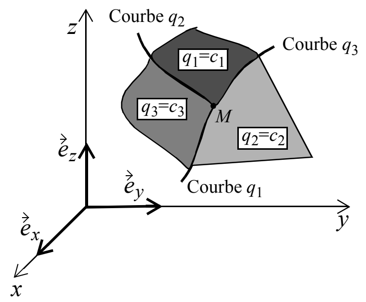


Figure III.5 *Définitions des coordonnées curvilignes orthogonales.*

Soit $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ le vecteur position d'un point M. Alors il peut s'écrire $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3)$. Un vecteur tangent à la courbe q_1 en M (pour laquelle q_2 et q_3 sont constant) est $\partial\vec{r}/\partial q_1$. Alors un vecteur unitaire tangent dans cette direction est

$$\vec{e}_1 = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}\Big/\left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}\right\| \text{ ainsi } \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1} = h_1\vec{e}_1 \text{ avec } h_1 = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}\right\|. \tag{3.36}$$

De même, si $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ sont des vecteurs unitaires tangents aux courbes q_2 et q_3 en M on a :

$$\vec{e}_2 = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_2}\Big/\left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_2}\right\|,\ \vec{e}_3 = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_3}\Big/\left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_3}\right\| \text{ soit } \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_2} = h_2\vec{e}_2,\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_3} = h_3\vec{e}_3 \text{ avec } h_2 = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_2}\right\| \text{ et}$$

$$h_3 = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_3}\right\|. \tag{3.37}$$

Les coefficients $\{h_i\}$ sont appelés *coefficients métriques* ou coefficients multiplicateurs, qui dépendent du système de repérage utilisé. Ils peuvent être déterminés géométriquement ou analytiquement. En effet, puisque

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial q_i}\vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial q_i}\vec{e}_z, \tag{3.38}$$

on obtient :

$$h_i = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}. \tag{3.39}$$

Pour les systèmes de coordonnées cylindrique et sphérique nous obtenons alors le tableau III.1.

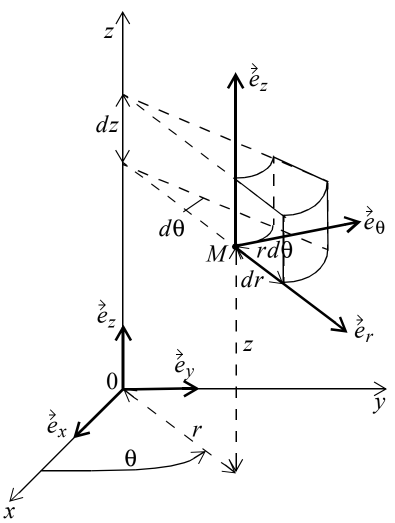
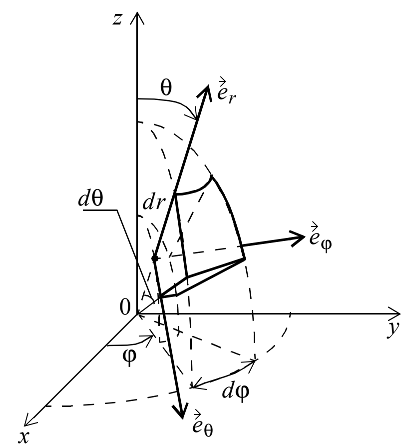
	Coordonnées cylindriques	Coordonnées sphériques
Définition	$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ et $\begin{cases} q_1 = r \\ q_2 = \theta \\ q_3 = z \end{cases}$	$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ et $\begin{cases} q_1 = r \\ q_2 = \theta \\ q_3 = \varphi \end{cases}$
Base locale	$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$	$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$
Coefficients métriques	$\begin{cases} h_1 = h_r = 1 \\ h_2 = h_\theta = r \\ h_3 = h_z = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} h_1 = h_r = 1 \\ h_2 = h_\theta = r \\ h_3 = h_\varphi = r\sin\theta \end{cases}$
Déplacements élémentaires	$\begin{cases} dx = dr \\ dy = rd\theta \\ dz = dz \end{cases}$	$\begin{cases} dx = dr \\ dy = rd\theta \\ dz = r\sin\theta d\varphi \end{cases}$
Représentation géométrique		

Tableau III.1 *Expression des coefficients métriques en coordonnées cylindriques et sphériques.*

Exemple 3.9 *Calculer les coefficients métriques* $\{h_i\}$ *en coordonnées sphériques.*

III.8.2 Expression des opérateurs vectoriels

Opérateur gradient

Soit $\overrightarrow{grad}(f) = \vec{\nabla} f = f_1\vec{e}_1 + f_2\vec{e}_2 + f_3\vec{e}_3$ où $\{f_i\}$ sont à déterminer. Puisque

$$\overrightarrow{\delta r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_3}dq_3 = (h_1 dq_1)\vec{e}_1 + (h_2 dq_2)\vec{e}_2 + (h_3 dq_3)\vec{e}_3 , \tag{3.40}$$

on a

$$\delta f = \overrightarrow{grad}(f) \cdot \overrightarrow{\delta r} = h_1 f_1 dq_1 + h_2 f_2 dq_2 + h_3 f_3 dq_3 , \tag{3.41}$$

mais

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial f}{\partial q_1} dq_2 , \tag{3.42}$$

donc par identification on obtient

$$f_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} . \tag{3.43}$$

Par conséquent

$$\overrightarrow{grad}(f) = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \vec{e}_i = \vec{\nabla}_q f , \tag{3.44}$$

où $\vec{\nabla}_q$ est l'opérateur nabla défini dans le repère $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ comme

$$\vec{\nabla}_q = \vec{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \vec{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \vec{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} = \sum_{i=1}^{i=3} \vec{e}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial q_i} . \tag{3.45}$$

Relations particulières

En appliquant la formule du gradient à la fonction scalaire q_i, on a :

$$\overrightarrow{grad}(q_i) = \frac{\vec{e}_i}{h_i} , \tag{3.46}$$

Puisque $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad} q_i) = \vec{0}$ pour tout q_i, nous obtenons

$$\overrightarrow{rot}\left(\frac{\vec{e}_i}{h_i}\right) = \vec{0} . \tag{3.47}$$

Dans un système de coordonnes curvilignes orthogonales, on peut toujours choisir les vecteurs unitaires de base $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ de sorte qu'ils forment un système orthogonal direct, c'est-à-dire

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 , \ \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 \text{ et } \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 . \tag{3.48}$$

Donc

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = h_2 h_3 \overrightarrow{grad}(q_2) \wedge \overrightarrow{grad}(q_3) \\ \vec{e}_2 = h_3 h_1 \overrightarrow{grad}(q_3) \wedge \overrightarrow{grad}(q_1) \\ \vec{e}_3 = h_1 h_2 \overrightarrow{grad}(q_1) \wedge \overrightarrow{grad}(q_2) \end{cases} \cdot \tag{3.49}$$

De plus

$$div(\vec{F}_1 \wedge \vec{F}_2) = \vec{F}_2 \cdot \overrightarrow{rot}\vec{F}_1 - \vec{F}_1 \cdot \overrightarrow{rot}\vec{F}_2 \text{ et } \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}f) = \vec{0} \quad \forall f, \tag{3.50}$$

d'où

$$div(\overrightarrow{grad}f_1 \wedge \overrightarrow{grad}f_2) = 0\,. \tag{3.51}$$

Par conséquent

$$div\left(\frac{\vec{e}_1}{h_2 h_3}\right) = div\left(\frac{\vec{e}_2}{h_3 h_1}\right) = div\left(\frac{\vec{e}_3}{h_1 h_2}\right) = 0\,. \tag{3.52}$$

Opérateur divergence

Soit le champ vectoriel $\vec{F}$ défini par $\vec{F} = F_1\vec{e}_1 + F_2\vec{e}_2 + F_3\vec{e}_3$. La divergence s'écrit alors

$$div\vec{F} = div(F_1\vec{e}_1 + F_2\vec{e}_2 + F_3\vec{e}_3) = div(F_1\vec{e}_1) + div(F_2\vec{e}_2) + div(F_3\vec{e}_3)\,, \tag{3.53}$$

Considérons alors le terme $div(F_1\vec{e}_1)$. Sachant que $div(f\vec{F}) = div(\vec{F})f + \vec{F} \cdot \overrightarrow{grad}(f)$, on a

$$\begin{aligned} div(F_1\vec{e}_1) &= div\left(h_2 h_3 F_1 \frac{\vec{e}_1}{h_2 h_3}\right) = div\left(\frac{\vec{e}_1}{h_2 h_3}\right)(h_2 h_3 F_1) + \left(\frac{\vec{e}_1}{h_2 h_3}\right) \cdot \overrightarrow{grad}(h_2 h_3 F_1) \\ &= 0 + \left(\frac{\vec{e}_1}{h_2 h_3}\right) \cdot \overrightarrow{grad}(h_2 h_3 F_1) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2 h_3 F_1) \end{aligned} \tag{3.54}$$

En traitant de la même manière les deux autres termes, on arrive à la formule suivante :

$$div\vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2 h_3 F_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_3 h_1 F_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1 h_2 F_3)\right] = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(h_1 h_2 h_3 \frac{F_i}{h_i}\right). \tag{3.55}$$

Opérateur rotationnel

Le rotationel s'écrit :

$$\overrightarrow{rot}\vec{F} = \overrightarrow{rot}(F_1\vec{e}_1 + F_2\vec{e}_2 + F_3\vec{e}_3) = \overrightarrow{rot}(F_1\vec{e}_1) + \overrightarrow{rot}(F_2\vec{e}_2) + \overrightarrow{rot}(F_3\vec{e}_3)\,. \tag{3.56}$$

Considérons alors le terme $\overrightarrow{rot}(F_1\vec{e}_1)$. Sachant que $\overrightarrow{rot}(f\vec{F}) = \overrightarrow{grad}(f) \wedge \vec{F} + (f)\overrightarrow{rot}\vec{F}$, on a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{rot}(F_1\vec{e}_1) &= \overrightarrow{rot}\left(h_1F_1\frac{\vec{e}_1}{h_1}\right) = \overrightarrow{grad}(h_1F_1) \wedge \left(\frac{\vec{e}_1}{h_1}\right) + (h_1F_1)\overrightarrow{rot}\left(\frac{\vec{e}_1}{h_1}\right) \\
&= \overrightarrow{grad}(h_1F_1) \wedge \left(\frac{\vec{e}_1}{h_1}\right) + \vec{0} \\
&= \left[\vec{e}_1\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}(h_1F_1) + \vec{e}_2\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}(h_1F_1) + \vec{e}_3\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3}(h_1F_1)\right] \wedge \left(\frac{\vec{e}_1}{h_1}\right) \\
&= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\vec{e}_2h_2\frac{\partial}{\partial q_3}(h_1F_1) - \vec{e}_3h_3\frac{\partial}{\partial q_2}(h_1F_1)\right]
\end{aligned}\,. \tag{3.57}$$

On procède de façon analogue pour les deux autres termes et on obtient alors :

$$\overrightarrow{rot}\vec{F} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{e}_1 & h_2\vec{e}_2 & h_3\vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{h_2h_3}\left[\dfrac{\partial}{\partial q_2}(h_3F_3) - \dfrac{\partial}{\partial q_3}(h_2F_2)\right] \\ \dfrac{1}{h_3h_1}\left[\dfrac{\partial}{\partial q_3}(h_1F_1) - \dfrac{\partial}{\partial q_1}(h_3F_3)\right] \\ \dfrac{1}{h_1h_2}\left[\dfrac{\partial}{\partial q_1}(h_2F_2) - \dfrac{\partial}{\partial q_2}(h_1F_1)\right] \end{pmatrix}. \tag{3.58}$$

<u>Opérateurs laplacien scalaire</u>

Par définition, le laplacien scalaire s’écrit $\nabla^2 f = div[\overrightarrow{grad}f]$ conduisant à

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\right)\right]. \tag{3.59}$$

<u>Application aux cas des coordonnées cylindriques et sphériques</u>

En coordonnées cylindriques et sphériques les coordonnées curvilignes orthogonales $\{q_i\}$ et les coefficients métriques $\{h_i\}$ sont exprimés dans le tableau III.1. Nous obtenons alors le tableau III.2.

Exemple 3.10 *Calculer la divergence en coordonnées sphériques et le rotationnel en coordonnées cylindriques.*

	Coordonnées cartésiennes	Coordonnées cylindriques	Coordonnées sphériques
$\overrightarrow{grad f}$	$\frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_y$	$\frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$	$\frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$
$div\vec{F}$	$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta F_\theta) + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}\right]$
$\overrightarrow{rot}\vec{F}$	$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x +$ $\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y +$ $\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial z} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r +$ $\left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta +$ $\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right]\vec{e}_z$	$\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta F_\varphi) - \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}\right]\vec{e}_r +$ $\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi)\right]\vec{e}_\theta +$ $\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right]\vec{e}_\varphi$
$\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{(r\sin\theta)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$

Tableau III.2 *Expression des principaux opérateurs vectoriels en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.*

CHAPITRE IV

Courbes paramétriques dans le plan et dans l'espace

IV.1 Courbes dans l'espace

IV.1.1 Définition

Définition 4.1 Courbe paramétrique dans l'espace. Soit $\vec{r}(t)$ un vecteur dans l'espace qui dépend de la seule variable réelle t. Si $\vec{r}(t)$ est le vecteur rayon d'un point $M(x, y, z)$ dans un système rectangulaire x, y, z alors

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z. \tag{4.1}$$

Lorsque le paramètre t varie, l'extrémité du vecteur $\vec{r}$ décrit une courbe Γ dans l'espace. On dit alors que les fonctions $x = x(t)$, $y = y(t)$ et $z = z(t)$ sont les équations paramétriques de la courbe Γ.

En général la représentation paramétrique d'une courbe n'est pas unique.

Définition 4.2 Dérivée d'un vecteur. Soit une fonction vectorielle $\vec{F}(t)$ de t définie au voisinage de t_0. Par analogie avec la dérivée d'une fonction scalaire, on appelle vecteur dérivé par rapport à t de la fonction $\vec{F}(t)$, relativement à une référentiel $\Re$, le vecteur lorsqu'il existe, noté $d\vec{F}/dt\big|_{\Re}$, tel que :

$$\left.\frac{d\vec{F}}{dt}\right|_{\Re} = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{F}(t) - \vec{F}(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{F}(t_0 + \Delta t) - \vec{F}(t_0)}{\Delta t}. \tag{4.2}$$

Dans le référentiel $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ noté $\aleph$, la dérivée du vecteur $\vec{r}(t)$ s'écrit donc

$$\begin{aligned}\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{\aleph} &= \frac{d}{dt}[x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z]_{\aleph} \\ &= \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z + \left(x\frac{d\vec{e}_x}{dt} + y\frac{d\vec{e}_y}{dt} + z\frac{d\vec{e}_z}{dt}\right)_{\aleph}\end{aligned} . \quad (4.3)$$

La base $\aleph$ étant supposée fixe (qui sera toujours le cas) par rapport à $\Re$, les vecteurs unitaires $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ sont des vecteurs constants, donc

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{\aleph} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z . \quad (4.4)$$

La dérivation selon t, dans le référentiel $\Re$ d'un vecteur $\vec{r}(t)$ explicité dans une base *fixe* par rapport à $\Re$, revient donc à dériver simplement les composantes de $\vec{r}(t)$. En conclusion

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z . \quad (4.5)$$

Comme le montre la figure suivante, le vecteur $d\vec{r}/dt$ est tangent à la courbe en M.

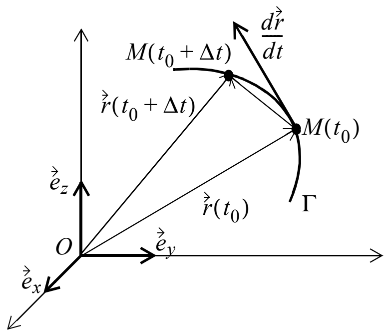


Figure IV.1 *Signification géométrique du vecteur* $d\vec{r}/dt$ *orienté dans le sens de déplacement de* M *sur* Γ.

IV.1.2 Abscisse curviligne

Définition 4.3 Abscisse curviligne. Soit une courbe Γ sur laquelle on choisi un point arbitraire d'origine P et un sens de parcours particulier, dit sens positif. Considérons un autre point $M \in \Gamma$ tel que l'arc $\widehat{PM}$ ait pour longueur l. A cette longueur on fait correspondre le scalaire s, appelé abscisse curviligne, tel que $|s| = l$. Le signe de s est positif (resp. négatif) si le parcours de P à M s'effectue dans le sens positif (resp. négatif). Pour un élément longueur dl infinisétimale, on a :

$$dl = ds = \|\vec{dl}\| = \left\|\frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z\right\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} . \quad (4.6)$$

Par conséquent pour deux valeurs t_1, t_2 du paramétrage, on peut écrire lorsque le sens de parcours est positif

$$s = \int_{t_1}^{t_2} dl = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt\,. \tag{4.7}$$

Dans la suite, on suppose qu'une courbe dans l'espace peut être donnée en fonction de son abscisse curviligne s : $\vec{r}(s) = x(s)\vec{e}_x + y(s)\vec{e}_y + z(s)\vec{e}_z$, et qu'elle possède des dérivées secondes ou si nécessaire troisièmes continues selon son paramètre. Cette représentation a de grands avantages, par exemple

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{ds}\,. \tag{4.8}$$

De plus

$$\left\|\frac{d\vec{r}}{ds}\right\| = \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{ds}\right\| = \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\|\frac{dt}{ds} = \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} = 1\,. \tag{4.9}$$

Le vecteur $d\vec{r}/ds$ est donc colinéaire à $d\vec{r}/dt$ donc *tangent* à la courbe en M et *unitaire*. Il sera noté $\vec{e}_t$.

IV.1.3 Repère de Frenet

Puisque $\vec{e}_t$ est un vecteur unitaire, on peut écrire $\vec{e}_t \cdot \vec{e}_t = 1$. En différentiant cette égalité par rapport au paramètre s, on obtient :

$$\frac{d\vec{e}_t}{ds} \cdot \vec{e}_t + \vec{e}_t \cdot \frac{d\vec{e}_t}{ds} = 2\vec{e}_t \cdot \frac{d\vec{e}_t}{ds} = \frac{d(1)}{ds} = 0\,, \tag{4.10}$$

c'est-à-dire la dérivée du vecteur tangent unitaire $\vec{e}_t$ est un vecteur perpendiculaire à $\vec{e}_t$; il n'est pas unitaire en général.

Définition 4.4 Rayon de courbure. On définit le vecteur *unitaire* $\vec{e}_n$ normal à $\vec{e}_t$ orienté vers la *concavité* de la courbe Γ en M par

$$\vec{e}_n = R_c \frac{d\vec{e}_t}{ds} = R_c \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\,, \tag{4.11}$$

où R_c est le *rayon de courbure* (scalaire positif) et $1/R_c$ la courbure de Γ en M.

Définition 4.5 Vecteur unitaire binormal. On appelle vecteur unitaire binormal $\vec{e}_b$ au point $M \in \Gamma$ le vecteur porté par la binormale tel que :

$$\vec{e}_b = \vec{e}_t \wedge \vec{e}_n . \tag{4.12}$$

La dérivée $d\vec{e}_b / ds$ s'écrit donc :

$$\frac{d\vec{e}_b}{ds} = \frac{d}{ds}(\vec{e}_t \wedge \vec{e}_n) = \frac{d\vec{e}_t}{ds} \wedge \vec{e}_n + \vec{e}_t \wedge \frac{d\vec{e}_n}{ds} = \frac{\vec{e}_n}{R_c} \wedge \vec{e}_n + \vec{e}_t \wedge \frac{d\vec{e}_n}{ds} = \vec{e}_t \wedge \frac{d\vec{e}_n}{ds} . \tag{4.13}$$

De plus

$$\vec{e}_t \cdot \frac{d\vec{e}_b}{ds} = \vec{e}_t \cdot \vec{e}_t \wedge \frac{d\vec{e}_n}{ds} = 0 \Rightarrow \vec{e}_t \perp \frac{d\vec{e}_b}{ds} , \tag{4.14}$$

et

$$\vec{e}_b \cdot \vec{e}_b = 1 \Rightarrow \vec{e}_b \perp \frac{d\vec{e}_b}{ds} . \tag{4.15}$$

Définition 4.6 Rayon de torsion. Le vecteur $d\vec{e}_b / ds$ est colinéaire à $\vec{e}_n$ (car il est normal à la fois à $\vec{e}_t$ et $\vec{e}_b$) et on peut écrire

$$\frac{d\vec{e}_b}{ds} = \frac{\vec{e}_n}{R_\tau} , \tag{4.16}$$

où R_τ est le *rayon de torsion* et $1 / R_\tau$ la torsion. La torsion caractérise la variation de la direction de la binormale à la courbe. Cette notion intervient uniquement pour les courbes à trois dimensions.

Enfin puisque, $(\vec{e}_n, \vec{e}_b, \vec{e}_t)$ forme un trièdre directe on a :

$$\vec{e}_n = \vec{e}_b \wedge \vec{e}_t \Rightarrow \frac{d\vec{e}_n}{ds} = \frac{d}{ds}(\vec{e}_b \wedge \vec{e}_t) = \frac{d\vec{e}_b}{ds} \wedge \vec{e}_t + \vec{e}_b \wedge \frac{d\vec{e}_t}{ds} = \frac{\vec{e}_n}{R_\tau} \wedge \vec{e}_t + \vec{e}_b \wedge \frac{\vec{e}_n}{R_c} , \tag{4.17}$$

soit

$$\frac{d\vec{e}_n}{ds} = -\frac{\vec{e}_b}{R_\tau} - \frac{\vec{e}_t}{R_c} . \tag{4.18}$$

Définition 4.7 Repère de Frenet. Le repère $(M, \vec{e}_t, \vec{e}_n, \vec{e}_b)$ est un repère orthonormé directe de Frenet ou repère intrinsèque. $(M, \vec{e}_t, \vec{e}_n)$ désigne le *plan osculateur*, $(M, \vec{e}_n, \vec{e}_b)$ désigne le *plan normal* et $(M, \vec{e}_t, \vec{e}_b)$ le *plan rectifiant*.

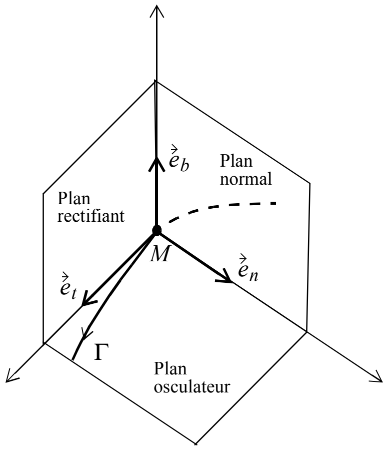


Figure IV.2 *Repère de Frenet.*

Exemple 4.1 *Soit la courbe définie par* $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ *et* $z = ht$. *Calculer a) le vecteur tangent unitaire* $\vec{e}_t$, *b) la normale* $\vec{e}_n$ *et la courbure* R_c *c) la binormale* $\vec{e}_b$ *et la torsion* R_τ.

Exemple 4.2 *Montrer que* $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{R_c}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \vec{e}_n \wedge \vec{e}_t$, en déduire l'expression de R_c selon $\{x(t), y(t), z(t)\}$.

IV.2 Courbe planes

Définition 4.8 Courbe paramétrique plane. Soit $\vec{r}(t)$ un vecteur dans le plan qui dépend de la seule variable réelle t. Si $\vec{r}(t)$ est le vecteur rayon d'un point $M(x, y)$ dans un système rectangulaire x, y, alors

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y . \tag{4.19}$$

Lorsque le paramètre t varie, l'extrémité du vecteur $\vec{r}$ décrit une courbe Γ dans le plan. On dit alors que les fonctions $x = x(t)$, $y = y(t)$ ont les équations paramétriques de la courbe Γ.

En général la représentation paramétrique d'une courbe n'est pas unique. Une hyperbole d'équation $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ a pour représentations paramétriques :

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos t} \\ y = b\tan t \end{cases},$$

ou

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}a\left(t + \dfrac{1}{t}\right) \\ y = \dfrac{1}{2}b\left(t - \dfrac{1}{t}\right) \end{cases}.$$

L'ensemble des résultats obtenus pour une courbe dans l'espace sont bien sûr applicables pour une courbe plane avec $z(t) = 0$. D'après (4.5), le vecteur vitesse en t est donc donné par

$$\vec{V}(t) = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y. \tag{4.20}$$

Il est tangent à la courbe en $M(t)$. De plus d'après (4.7), l'abscisse curviligne pour deux valeurs t_1, t_2 du paramétrage, s'écrit pour un sens de parcours positif

$$s = \int_{t_1}^{t_2} dl = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt. \tag{4.21}$$

La base de Frenet devient $(\vec{e}_t, \vec{e}_n)$, où

$$\vec{e}_t = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} \text{ et } \vec{e}_n = R_c\frac{d\vec{e}_t}{ds} = R_c\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}. \tag{4.22}$$

<u>Etude au voisinage de $t_1 = t_0 + h$</u>

Nous supposons que la courbe Γ est décrite paramétriquement par deux fonctions x et y dérivables n fois sur l'intervalle E de t. On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM}(t_0+h) &= \overrightarrow{OM_1} = x(t_0+h)\vec{e}_x + y(t_0+h)\vec{e}_y \\
&= \left[x(t_0) + hx'(t_0) + \frac{h^2}{2}x'(t_0) + \ldots + \frac{h^n}{n!}x^{(n)}(t_0) + h^n\alpha(h)\right]\vec{e}_x \\
&\quad + \left[y(t_0) + hy'(t_0) + \frac{h^2}{2}y'(t_0) + \ldots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(t_0) + h^n\beta(h)\right]\vec{e}_y \\
&= \overrightarrow{OM}(t_0) + h\vec{V}(t_0) + \frac{h^2}{2}\vec{V}'(t_0) + \ldots + \frac{h^n}{n!}\vec{V}^{(n-1)}(t_0) + h^n\varepsilon(h)
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Définition 4.9 Si $\vec{V}(t_0) \wedge \vec{V}'(t_0) \neq \vec{0}$ alors la courbe en M_0 présente un point *ordinaire* (cf. figure IV.3)

Définition 4.10 Si $\vec{V}(t_0) \wedge \vec{V}'(t_0) = \vec{0}$ et $\vec{V}(t_0) \wedge \vec{V}''(t_0) \neq \vec{0}$ alors la courbe en M_0 présente un point d' *inflexion* (cf. figure IV.3).

Définition 4.11 Si $\vec{V}(t_0) = \vec{0}$, $\vec{V}'(t_0) \neq \vec{0}$ et $\vec{V}'(t_0) \wedge \vec{V}''(t_0) \neq \vec{0}$ alors la courbe en M_0 présente un point de *rebroussement de première espèce* (cf. figure IV.3).

Définition 4.12 Si $\vec{V}(t_0) = \vec{0}$, $\vec{V}'(t_0) \neq \vec{0}$, $\vec{V}'(t_0) \wedge \vec{V}''(t_0) = \vec{0}$ et $\vec{V}'(t_0) \wedge \vec{V}'''(t_0) \neq \vec{0}$ alors la courbe en M_0 présente un point de *rebroussement de seconde espèce* (cf. figure IV.3).

Branches infinies

Définition 4.13 La courbe Γ admet une branche infinie pour la valeur t_0 du paramètre t si dans $R \times R$ la norme de la longueur de $\overrightarrow{OM}(t)$ tend vers l'infini lorsque t tend vers t_0.

Définition 4.14 La courbe Γ admet une direction asymptotique lorsque t tend vers t_0 si le vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ admet un direction limite lorsque t tend vers t_0. Ceci a lieu lorsque l'angle $\varphi(t)$ du vecteur abscisse avec $\overrightarrow{OM}(t)$ admet une limite; mais on a $m(t) = y(t)/x(t) = \tan\varphi(t)$. La direction asymptotique est donc donnée par $m = \lim\limits_{t \to t_0} m(t)$.

Définition 4.15 La courbe Γ admet une asymptote lorsque t tend vers t_0 si elle admet une direction asymptotique donnée par $m = lim_{t \to t_0} m(t)$ et si de plus $y(t) - mx(t)$ admet une limite d lorsque t tend vers t_0. L'asymptote a pour équation : $y = mx + d$.

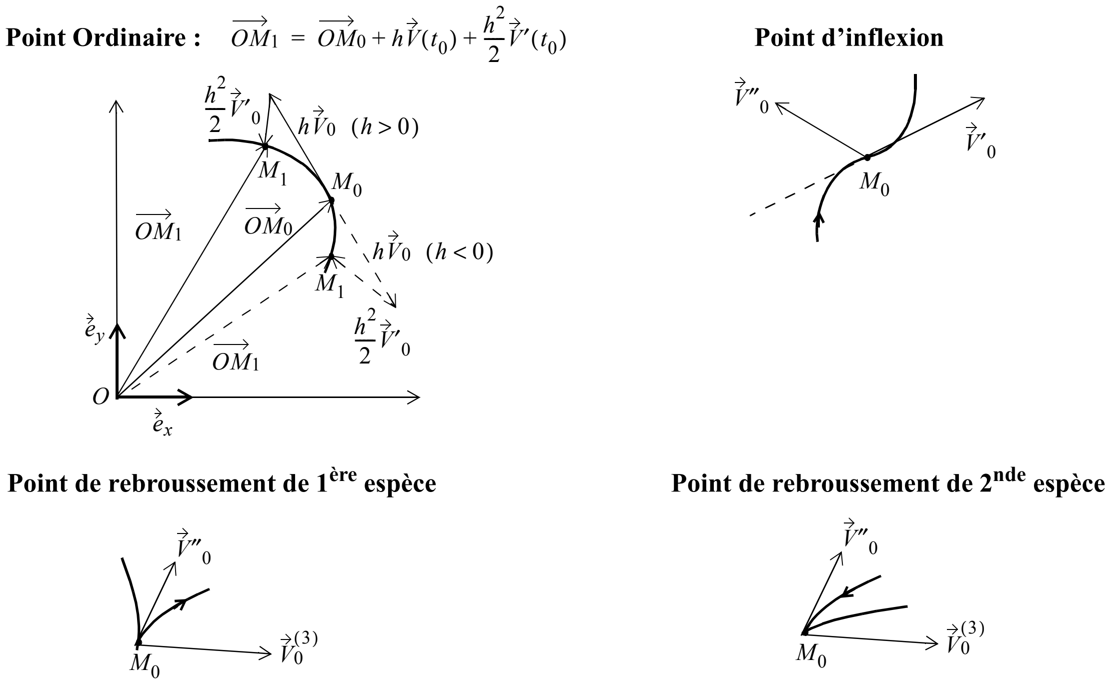


Figure IV.3 *Illustration de quelques points particuliers que peut présenter une courbe paramétrée au point M_0. On note $M(t_0) = M_0$ et $M(t_0 + h) = M_1$.*

Exemple 4.3 *Etudier la courbe paramétrique définie par*

$$\begin{cases} x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = t\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}.$$

Exemple 4.4 *Etudier la courbe paramétrique définie par*

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}.$$

Bibliographie

[1] N. Burger, Cours *Prérequis d'analyse*, Ecole polytechnique de l'université de Nantes, 2002-2003.

[2] Erwin Kreyszig, *Advanced engineering mathematics*, seventh edition, John Wiley and Sons (New York) 1993.

[3] M. Vygodsky, *Aide-mémoire de mathématiques supérieures*, Edition Mir Moscou, quatrième édition, 1990.

[4] Xavier Gourdon, *Les maths en tête*, Ellipses, 1994.

[5] Louis Gacôgne, *Algébre et analyse cours de mathématiques tome 1*, Eyrolles, 1990.

[6] André Baumy et Michel Bonnaud, *Mathématique pour le physicien tome 1*, McGraw-Hill (Paris), 1989.

[7] Gabriel Soum, Raymond Jagut et Pierre Dubouix, *Techniques mathématiques pour la physique - I*, Hachette, 1995.

[8] Gabriel Soum, Raymond Jagut et Pierre Dubouix, *Techniques mathématiques pour la physique - II*, Hachette, 1995.

[9] Murray R. Spiegel, *Analyse vectorielle cours et problème*, McGraw-Hill (New-York), douzième édition, 1973.

[10] Murray R. Spiegel, *Analyse cours et problème*, McGraw-Hill (New-York), dix-septième édition, 1973.

[11] Frank Ayres, *Equations différentielles cours et problème*, McGraw-Hill (New-York), quinzième édition, 1972.

[12] G. Hirsch et G. Eguether, *Fonctions de plusieurs variables*, Masson, 1994.

[13] K. Arbenz et A. Wohlhauser, *Complèments d'analyse*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1993.

[14] M. Chossat, *Aide Mémoire de Mathématiques de l'ingénieur*, Dunod, 1996.

[15] Marie-Pascale Avignon et Jacques Rogniaux, *Analyse 369 exercices corrigés*, Ellipses, 1991.

TDs 2005-2006 : limite, développement limité, intégrale, équation différentielle d'une fonction d'une seule variable réelle

I. Développement limité

A) Est-il exact qu'au voisinage de 0, on a l'égalité $\dfrac{1}{1-x-x^2} = 1+x+x^2+o(x^2)$.

B) Donner un développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction f définie par $f(x) = \sin x + x^5 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

C) Vérifier si l'égalité suivante est vraie : $f(x) = \sin(x)/(x+x^2) = 1-x+o(x^2)$.

D) Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $f(x) = x/(e^x-1)$.

E) Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $f(x) = \dfrac{\sin x}{1-\sin x} - \sin\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$.

F) Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 5 de $f(x) = e^{\cos x}$.

G) Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

II. Limite

A) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x(2-x)\tan(2x)}$.

B) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3}$.

C) Calculer $\lim\limits_{x \to 1/2} (2x^2-3x+1)\tan(\pi x)$.

D) Calculer $\lim\limits_{x \to \pi/2} (\tan x)(\tan 2x)$.

E) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$ avec a et b réels.

F) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$ avec $a, b \in \,]0;+\infty[$.

III. Intégrale

A) Calculer $\int x \ln x dx$ sur son domaine de définition.

B) Calculer $\int \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) dx$ sur son domaine de définition.

C) Sachant que $J_n = \int \dfrac{dt}{(1+t^2)^n}$, trouver une relation de récurrence entre J_n et J_{n-1}. Calculer J_1, J_2 et J_3.

D) Calculer $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2}$ sur son domaine de définition.

E) Calculer $\int \dfrac{dx}{(a-x)(b-x)^2}$ sur son domaine de définition.

F) Calculer $\int \dfrac{x^2 dx}{(1+x)^2(1-x)^2}$ sur son domaine de définition.

G) Calculer $\int \dfrac{(\sin\theta)^2 d\theta}{\cos\theta}$ sur domaine de définition.

H) Calculer $\int \dfrac{d\theta}{D + R\cos\theta}$ sur son domaine de définition avec $D > R$.

I) Calculer $\int (\tan\theta)^2 d\theta$ sur son domaine de définition.

J) Calculer $\int (\sin\theta)^3 (\cos\theta)^2 d\theta$ sur son domaine de définition.

IV. Equation différentielle

A) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $y'(x) - y = x^2$. Quelle est la solution correspondant à la condition initiale $y = 0$ pour $x = 0$.

B) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $y'(x) + By = A\sin(\omega x)$. Quelle est la solution correspondant à la condition initiale $y = 0$ pour $x = 0$. En déduire la solution complète pour $A = 6$, $B = \sqrt{3}$ et $\omega = 1$.

C) Résoudre l'équation $y''(x) - \omega_0^2 y(x) = 0$ avec ω_0 réel. Que devient la solution générale si $\omega_0 = 2$ et si les condition initiales sont telles que pour $x = 0$, on a $y = y_0$ et $y'(0) = 0$. Intégrer l'équation différentielle $y''(x) + \omega_0^2 y(x) = 0$.

D) Résoudre l'équation $y''(x) - 4y(x) = 4x^2$ en utilisant la méthode de la variation de la constante.

V. Etude de fonction

A) Etudier la fonction f, définie par $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x-3}}$. a) Domaine de définition, continuité et dérivabilité b) Parité c) Limites aux bornes du domaine de définition d) Branches infinies e) Dérivée f) Tableau de variation g) Tracé de la courbe.

TDs 2005-2006 : Fonction à plusieurs variables réelles

I. Continuité et limite

Rappel : pour que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ existe il faut que cette limite ait la même valeur quelle que soit la façon dont (x, y) tend vers (x_0, y_0).

A) Déterminer si $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 2y, & (x, y) \neq (1, 2) \\ 0, & (x, y) = (1, 2) \end{cases}$

a) a une limite quand $x \to 1$ et $y \to 2$, b) est continue en $(1, 2)$.

B) Etudier la continuité au point $(0, 0)$ de la fonction de R^2 dans R définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\ln(x^2 + y^2), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

C) Etudier la continuité au point $(0, 0)$ de la fonction de R^2 dans R définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\ln(|x/y|), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

D) Etudier la continuité au point $(0, 0)$ de la fonction de R^2 dans R définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 + y^5}{x^4 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

E) Etudier la continuité au point $(0, 0)$ de la fonction de R^2 dans R définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{e^{xy - 1}}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

II. Dérivées partielles

Pour chacune des fonctions définies ci-dessous, le domaine de définition est demandé.

A) Si $f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2$, calculer $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ en x_0 et y_0 directement à partir de la définition de la dérivée partielle d'une fonction à deux variables.

B) Soit $f(x, y) = \begin{cases} xy/(x^2+y^2) & si \quad (x, y) \neq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$. Démontrer que a) $f_x'(0, 0)$ et $f_y'(0, 0)$ existent, mais que b) $f(x, y)$ est discontinue en zéro.

C) Si $f(x, y) = x^3 y + e^{xy^2}$, calculer f_x', f_y', f_x'', f_y'', f_{xy}'' et f_{yx}''.

D) Montrer que $U(x, y, z) = 1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ avec x, y et z différents de zéro satisfait l'équation aux dérivées partielles de Laplace $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$.

E) Si $f(x, y) = x^2 arc\tan\left(\dfrac{y}{x}\right)$, calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ en $(1, 1)$.

F) La capacité d'un condensateur plan est donné par $C = \varepsilon S/d$ où S est la surface de l'armature, ε la permittivité du diélectrique et h la distance entre les deux armatures. Calculer la variation de C, notée ΔC, lorsque ε et d subissent respectivement des petites variations $\Delta\varepsilon$ et Δd.

III. Différentation des fonctions composées

A) Si $x(\rho, \phi) = \rho\cos\phi$, $y(\rho, \phi) = \rho\sin\phi$ avec $\rho > 0$ et $\phi \in [0;2\pi]$, montrez que $V(x, y)$ de classe C^1 vérifie

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \phi}\right)^2.$$

B) Montrer que $z = f(x^2 y)$, où f est différentiable, vérifie $x\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = 2y\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$.

C) Démontrer que $Y = f(x+at) + g(x-at)$ satisfait la relation $\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$, où f est g sont deux fois dérivables et a une constante quelconque.

On considère une fonction à deux variables $f(x, y)$ de classe C^1 de D_f dans R. Soit les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ de classe C^1 est définie de D_f dans R. Calculer a) la différentielle totale δf de f selon (x, y), b) la différentielle totale δf de f selon (u, v). Conclure.

IV. Intégrale Curviligne

Rappel : Une forme différentielle $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ est dite *exacte* si les fonctions P et Q de classe C^1 vérifient la relation $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. On écrit alors $Pdx + Qdy = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$. L'intégrale curviligne s'écrit alors pour une courbe ouverte

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\widehat{AB}} df = f(B) - f(A) .$$

A) Calculer l'intégrale curviligne $\int_{(0,\,1)}^{(1,\,2)} (x^2 - y)dx + (y^2 + x)dy$ le long a) d'une ligne droite joignant le point $(0, 1)$ au point $(1, 1)$ et ensuite de la ligne droite allant du point $(1, 1)$ au point $(1, 2)$ c) de la parabole $x = t$, $y = t^2 + 1$.

B) Si $\vec{A} = (3x^2 - 6yz)\vec{i} + (2y + 3xz)\vec{i} + (1 - 4xyz^2)\vec{k}$, calculer $\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$ de $(0, 0, 0)$ à $(1, 1, 1)$ le long des chemins suivants C :

a) $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

b) Les segments de droite joignant $(0, 0, 0)$ à $(0, 0, 1)$, puis $(0, 0, 1)$ à $(0, 1, 1)$ et enfin $(0, 1, 1)$ à $(1, 1, 1)$.

c) La ligne droite allant du points $(0, 0, 0)$ au point $(1, 1, 1)$.

C) Calculer le travail effectué en déplaçant une particule une seule fois le long d'une ellipse C dans le plan xy, sachant que l'ellipse a pour centre l'origine, pour demi-grand axe et pour demi-petit axe, respectivement 3 et 4 et sachant que le champ de force est donné par :

$$\vec{F} = (3x - 4y + 2z)\vec{i} + (4x + 2y - 3z^2)\vec{i} + (2xz - 4y^2 + z^3)\vec{k} .$$

D) Calculer $\int_C yds$ où $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ le long de la courbe C donnée par $y = 2\sqrt{x}$ de $x = 3$ à $x = 24$.

E) Démontrer que $\int_{(1,\,2)}^{(3,\,4)} (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy$ est indépendant du chemin joignant le point $(1, 2)$ au point $(3, 4)$ et calculer alors de deux façons différentes cette intégrale.

F) Calculer $\oint (x^2y\cos x + 2xy\sin x - y^2e^x)dx + (x^2\sin x - 2ye^x)dy$ sur l'hypocycloïde $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

V. Intégrales doubles

A) Tracez le domaine D du plan xy délimité par les courbes $y = x^2$, $x = 2$, $y = 1$ et calculez l'intégrale double $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$.

B) Calculer l'intégrale $\iint_D (2x + y^2) dx dy$ où D est le triangle délimité par les axes et la droite d'équation $y = -2x + 2$.

C) Calculer l'intégrale $\iint_D e^{x+y} dx dy$ sur le losange $|x| + |y| \leq 1$.

D) Calculer $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ où D est le domaine du plan xy limité par $x^2 + y^2 = 4$ et $x^2 + y^2 = 9$.

E) Calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha x + a)^2 + (\beta y + b)^2} dx dy$ avec α et β différents de zéro.

F) Calculer $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ où D est le domaine du plan xy délimité par $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 9$, $xy = 2$ et $xy = 4$.

VI. Extrema

A) Ecrire le polynôme de Taylor d'ordre 2 en $(0, \pi/2)$ de la fonction définie par $f(x, y) = e^x \sin(x + y)$.

B) Trouver les points stationnaires ou critiques de la fonction définie par $f(x, y) = x^4 + 14x^2y^2 - 7y^4 - 4x + 6$.

C) Trouver les maxima et minima relatifs de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$.

D) Sot une boîte rectangulaire d'un volume de 32 m^3. Quelle doivent être ses dimensions pour que la surface totale soit minimale?

VII. Equations aux dérivées partielles

On cherche à déterminer, si elle existe, la fonction $F(x, y)$ définie de R^2 dans R vérifiant l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0.$$

On considère le changement de variables $u = x + \alpha y$ et $v = x + \beta y$ où α et β sont des nombres réels distincts dont la valeur sera fixée ultérieurement. On définit la fonction F_1 par $F_1(u(x, y), v(x, y)) = F(x, y)$.

A) Calculer les dérivées premières et secondes de F en fonction des dérivées premières et secondes de F_1.

B) b) Montrer que F_1 vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(1 - \alpha - 2\alpha^2)\frac{\partial^2 F_1}{\partial u^2} - (1 - \beta - 2\beta^2)\frac{\partial^2 F_1}{\partial v^2} + (2 - 4\alpha\beta - \alpha - \beta)\frac{\partial^2 F_1}{\partial u \partial v} = 0 .$$

C) Déterminer α et β distincts pour que l'équation ci-dessus se ramène à

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial u \partial v} = 0 \text{ (E1).}$$

D) En déduire les solutions de (E1).

E) En déduire les solutions de l'équation initiale.

Epreuve du cours intitulé "Accueil scientifique : Analyse", lundi 24 novembre 2003, durée 1H30

I. Intégrale d'une fonction à une seule variable (10 points)

A) Calculer $I_A = \int_{-1}^{0} e^x \sqrt{1-e^x}\,dx$ en justifiant son existence. On pourra poser $t = e^x$. **(2)**

B) Calculer $I_B = \int_{-1}^{1} (1+x^2)\sqrt{1-x^2}\,dx$ en justifiant son existence. On pourra poser $x = \sin t$. **(2)**

C) Calculer $I_C = \int_{0}^{\pi/4} \frac{\tan x}{1+\cos x}dx$ en justifiant son existence. **(3)**

D) Calculer $I_D = \int_0^1 f(x)dx$ où $f(x) = \frac{x^3+2x^2+1}{x^2+x+1}$ en justifiant son existence. On pourra décomposer f comme $f(x) = ax+b+g(x)$ ou a et b sont des réels. On rappelle que $\int \frac{dx}{1+x^2} = arc\tan(x) + cste$. **(3)**

II. Equation différentielle (3 points)

A) Soit l'équation différentielle (E) suivante : $x\frac{dy}{dx} - y(x) = \ln(x)$ avec $x > 0$. Donner un «nom» à (E) et la résoudre en utilisant la méthode de la variation de la constante.

III. Développement limité et limite (4 points)

A) Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $f(x) = \frac{x}{\sin x}$. **(2)**

B) Calculer $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin x}{x - \sin x}$. **(2)**

Rappels :

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

IV. Problème : résolution d'un équation aux dérivées partielles (8 points)

On cherche à déterminer, si elle existe, la fonction $F(x, y)$ définie de R^2 dans R (espace des réels) vérifiant l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 .$$

On considère le changement de variables $u = x+\alpha y$ et $v = x+\beta y$ où α et β sont des nombres réels distincts dont la valeur sera fixée ultérieurement. On définit la fonction F_1 par $F_1(u(x, y), v(x, y)) = F(x, y)$.

A) Calculer les dérivées premières et secondes de F en fonction des dérivées premières et secondes de F_1 . **(3)**

B) Montrer que F_1 vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(1-\alpha-2\alpha^2)\frac{\partial^2 F_1}{\partial u^2}-(1-\beta-2\beta^2)\frac{\partial^2 F_1}{\partial v^2}+(2-4\alpha\beta-\alpha-\beta)\frac{\partial^2 F_1}{\partial u \partial v} = 0 \text{ . } \mathbf{(2)}$$

C) Déterminer α et β distincts pour que l'équation ci-dessus se ramène à

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial u \partial v} = 0 \text{ (E1). } \mathbf{(1)}$$

D) En déduire les solutions de (E1). **(1)**

E) En déduire les solutions de l'équation initiale. **(1)**

Epreuve du cours intitulé "Accueil scientifique : Analyse", jeudi 4 décembre 2003, durée 1H30

I. Intégrale d'une fonction à une seule variable (8 points)

A) Donner le domaine de définition de $f(x) = \int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$ et la calculer. On pourra poser $X = x^2$ et effectuer une intégration par partie. **(3)**

B) Donner le domaine de définition de $f(x) = \int \frac{dx}{x^2+4}$ et la calculer. On rappelle que $\int \frac{dx}{1+x^2} = arc\tan(x) + cste$. **(2)**

C) Calculer $I_C = \int_a^b \frac{dx}{x(1+x)^2}$ en justifiant son existence. On pourra décomposer l'intégrande en éléments simples. **(3)**

II. Equation différentielle (4 points)

A) Soit l'équation différentielle (E) suivante : $\frac{dy}{dx}x^2 - y(x)(1+x) = 0$. Donner un «nom» à (E) et la résoudre en utilisant la condition $y(1) = 1/e$. **(2)**

B) Soit l'équation différentielle (E) suivante : $\frac{dy}{dx}x^2 + y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ avec $x \neq 0$. Donner un «nom» à (E) et la résoudre en utilisant la méthode de la variation de la constante. **(2)**

III. Développement limité et limite (4 points)

A) Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $f(x) = \frac{1}{\cos x}$. **(2)**

B) Calculer $\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(\sin x)^2}\right)$. **(2)**

Rappel : $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) .$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) .$$

IV. Dérivées partielles (4 points)

Soit la fonction $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ de R^2 dans R (espace des réels) avec $x^2 + y^2 \neq 0$. On effectue alors le changement de variables $x(r, \theta) = r\cos\theta$ et $y(r, \theta) = r\sin\theta$ avec $r \neq 0$ et $\theta \in R$. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial r}$ et $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ en fonction de x et y.

Epreuve du cours intitulé "Accueil scientifique : Analyse", mercredi 28 janvier 2004, durée 50 mn

---

I. Analyse vectorielle (9)

A) Si $f = \ln(r)$ où $r > 0$, calculer alors $\overrightarrow{grad} f$ en fonction de $\vec{r}$ où $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ et $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. **(3)**

B) A partir des définitions en coordonnées cartésiennes du rotationnel $\overrightarrow{rot}$ et du gradient $\overrightarrow{grad}$, montrer que $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad} f) = \vec{0}$ où $f(x, y, z)$ est une fonction de classe C^2. **(3)**

C) A partir des définitions en coordonnées cartésiennes de la divergence div et du rotationnel $\overrightarrow{rot}$, montrer que $div(\overrightarrow{rot}\vec{F}) = 0$ où $\vec{F}$ est une fonction vectorielle dont les composantes $\{F_x, F_y, F_z\}$ sont des fonctions de classe C^2. **(3)**

II. Intégrale curvligne (5)

A) Soit C un cercle de rayon a et de centre à l'origine. Soit Γ le chemin parcourant une fois le cercle C dans le sens trigonométrique. Calculer alors l'intégrale curviligne $I_A = \oint_{\Gamma} y dx + (x^2 + y^2) dy$. (3)

B) Calculer $P(x, y)$, afin que l'intégrale curviligne $\oint_{\Gamma} P(x, y) dx + (x^2 + y^2) dy$ soit nulle où Γ est un chemin fermé quelconque. (2)

III. Intégrale double (6)

A) Calculer $I_3 = \int_0^{\infty} dy \left(\int_0^{\infty} x^2 \exp[-(x^2 + y^2)^2] dx \right)$ en utilisant le système de coordonnées polaires (r, θ).

Epreuve du cours intitulé "Accueil scientifique : Analyse", vendredi 8 octobre 2004, durée 1H00

I. Intégrale d'une fonction à une seule variable (10 points)

Calculer $F(x) = \int f(x)dx$, où $f(x) = \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$ avec $a > 0$. On pourra considérer trois cas :

A) Cas a : le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ (4 points).

B) Cas b : le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ (2 points).

C) Cas c : le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ (4 points).

II. Equation différentielle (6 points)

Soit l'équation différentielle (E) suivante : $y'(x)x^2 + y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ avec $x \neq 0$. Donner un «nom» à (E) et la résoudre en utilisant la méthode de la variation de la constante.

III. Développement limité (4 points)

Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$. **(2)**

Epreuve du cours intitulé "Accueil scientifique : Analyse", lundi 15 octobre 2004, durée 1H30

I. Intégrale d'une fonction à une seule variable (7 points)

Dans cet exercice, on cherche à calculer **une primitive** de la fonction f définie par $f(x) = 1/(a + b \times \tan x)$, où a et b sont des réels et $b \neq 0$.

A) Donner le domaine de définition, D_F, de F définie par $F(x) = \int f(x)dx$. (**1 point**)

B) En effectuant le changement de variable $t = \tan x$, exprimer F en fonction de t. (**1 point**)

C) A l'aide d'une décomposition en élément simple, montrer que $F(t)$ peut s'écrire:

$$F(t) = \frac{1}{a^2 + b^2}\left(b^2\int\frac{1}{a + bt}dt + a\int\frac{1}{1 + t^2}dt - b\int\frac{t}{1 + t^2}dt\right).$$ (**3 points**)

D) En déduire $F(t)$. (**1.5 point**)

E) 5) En déduire $F(x)$. (**0.5 point**)

II. Equation différentielle (4 points)

Soit l'équation différentielle (E) suivante: $y(x) + y'(x)x = \ln(x)$ avec $x > 0$. Résoudre (E) en utilisant la méthode de la variation de la constante.

III. Développement limité (3 points)

Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $f(x) = \exp[2\sin(x)]$.

IV. Rotationnel et intégrale curviligne (6 points)

Soit le champ de vecteur défini dans le corps des réels par $\vec{F}(x, y, z) = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_x + F_z\vec{e}_x$ où $F_x = y\cos(z)$, $F_y = x\cos(z)$ et $F_z = -xy\sin(z)$.

A) Montre que $\overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{0}$. (**2 points**)

B) En déduire la fonction scalaire $f(x, y, z)$ associée. (**3 points**)

C) En déduire l'intégrale curviligne $I = \int_{(0,0,0)}^{(1,1,\pi)} (\overrightarrow{rot}\vec{F}) \cdot d\vec{r}$ où $d\vec{r} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_x + dz\vec{e}_x$ sur un chemin Γ quelconque. (**1 point**).

Epreuve du cours intitulé "Accueil scientifique : Analyse", lundi 24 octobre 2005, durée 1H30

I. Intégrale (4 points)

soit $F(x) = \int f(x)dx$, où $f(x) = \tan x / [1 + (\cos x)^2]$.

A) Donner le domaine de définition de F, noté D_F.

B) Calculer $F(x)$.

II. Développement limité (4 points)

Calculer le développement limité de la fonction $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1+x}\right)$ au voisinage de 0 et à l'ordre 3. On donne les développements limités en zéro et à l'ordre n suivant :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + O(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + O(x^n)$$

III. Equation différentielle (6 points)

Soit l'équation différentielle suivante :

$$y''(x) + 4y(x) = 16xe^{2x} \quad \text{(E)}.$$

A) Donner un "nom" à (E).

B) Résoudre (E); pour le calcul de la solution particulière, on pourra utiliser le tableau en page 24 du cours.

IV. Problème (6 points)

Dans l'air (assimilé au vide), les champs électrique $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t)$ et magnétique $\vec{H} = \vec{H}(x, y, z, t)$ vérifient :

$$\begin{cases} \overrightarrow{rot}\vec{E} = -\mu_0 \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1) & div\vec{H} = 0 \quad (3) \\ \overrightarrow{rot}\vec{H} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2) & div\vec{E} = 0 \quad (4) \end{cases},$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide et ε_0 la permittivité diélectrique du vide. Ce sont des constantes.

A noter que les questions A), B) et C) sont **indépendantes**.

A) En prenant le rotationnel de l'équation (1) et en utilisant la relation $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{F}) = -\nabla^2\vec{F} + \overrightarrow{grad}(div\vec{F})$, montrer que $\vec{E}$ vérifie l'équation de propagation suivante :

$$\nabla^2\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

B) En supposant que $\vec{E}(x, y, z, t) = E_x(x, y, z)\exp(j\omega t)\vec{e}_x$, montrer que l'équation de propagation devient

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k_0^2 E_x = 0 \text{ avec } k_0^2 = \mu_0\varepsilon_0\omega^2.$$

C) En supposant que $E_x(x, y, z) = E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\exp(-j\beta x)$ avec E_0 constant, en déduire à l'aide de la question B) une relation entre β et (k_0, a), où $\beta > 0$ et $E_x \neq 0$.